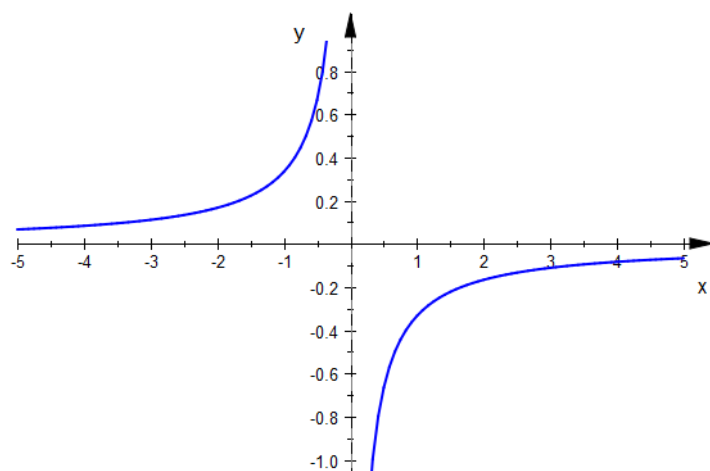


Kompendium til MATH001 - Forkurs i matematikk

Høst 2017, NMBU

Kine Josefine Aurland-Bredesen, e-post: kine.josefine.aurland-bredesen@nmbu.no



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

- Kompendiumet gir en rask gjennomgang av grunnleggende regneteknikk og ferdigheter.
- Tema som dekkes er prosentregning, eksponenter, brøk, faktorisering, regnerekkefølge, første og andregradslikninger, likningssystem med to ukjente, ulikheter og funksjoner.
- Inneholder totalt 292 oppgaver med løsningsforslag.

Innhold

1	Prosentregning	1
1.1	Regneregler	1
1.2	Prosentvis endring	2
	Oppgavesett 1	3
	Fasit	6
2	Potensregning	8
2.1	Regneregler	8
2.2	Tall på standardform	9
	Oppgavesett 2	10
	Fasit	13
3	Regnerekkefølge, kvadratsetninger og faktorisering	15
3.1	Regnerekkefølge	15
3.2	Kvadratsetninger	15
3.3	Primtallsfaktorisering	16
3.4	Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunktmetoden	16
	Oppgavesett 3	17
	Fasit	19
4	Brøkregning	21
4.1	Addisjon og fellesnevner	23
4.2	Multiplikasjon	24
4.3	Brudden brøk	24
	Oppgavesett 4	26
	Fasit	29
5	Likninger	32
5.1	Førstegradslikninger	32
5.2	Andregradslikninger	34
5.3	Likningssett med to ukjente	36
	Oppgavesett 5	38
	Fasit	41
6	Funksjoner	44
6.1	Hva er en funksjon?	44
6.2	Polynomfunksjoner: Førstegradfunksjoner (lineære funksjoner)	45
6.3	Polynomfunksjoner: Andregradfunksjoner	47
6.4	Rasjonelle funksjoner	48
6.5	Eksponentialfunksjoner	49
6.6	Logaritmefunksjoner	51
6.7	Trigonometriske funksjoner	51
6.8	Et nyttig eksempel: Kvadratrot	53
	Oppgavesett 6	55
	Fasit	57

7	Ulikheter	59
7.1	Regneregler	59
7.2	Førstegradulikheter	60
7.3	Andregradsulikheter	60
	Oppgavesett 7	63
	Fasit	65
8	Summetegn (ekstra, undervises ikke høst 2017)	66
	Oppgavesett 8	67
	Fasit	68
	Notasjonshjelpa	69
	Løsningsforslag	71
	Oppgavesett 1	71
	Oppgavesett 2	73
	Oppgavesett 3	76
	Oppgavesett 4	79
	Oppgavesett 5	84
	Oppgavesett 6	90
	Oppgavesett 7	97
	Oppgavesett 8	104

1 Prosentregning

Prosent betyr hundredel. Antall prosent av en størrelse (også kalt grunnverdi) er antall hundredeler av størrelsen. 25% er det samme som $\frac{25}{100}$, 25 hundredeler. En skog som består av 100 trær, der 25% av alle trærne er bjørketrær, har 25 bjørketrær totalt. Antall trær skogen består av er grunnverdien. Grunnverdien er ikke alltid 100, den kan være hva som helst. Det ser vi eksempler på etterpå. Andelen av grunnverdien er antall bjørketrær som finnes i skogen. Vi kan skrive 25% på mange måter. For eksempel 0.25, $\frac{25}{100}$ og $\frac{1}{4}$.

For å gjøre prosentregning enklere har vi noen regneregler.

1.1 Regneregler

$$\text{Andel av grunnverdi} = \text{Prosent} \cdot \text{Grunnverdi} \quad (1)$$

$$\text{Prosent} = \frac{\text{Andel av grunnverdi}}{\text{Grunnverdi}} \quad (2)$$

$$\text{Grunnverdi} = \frac{\text{Andel av grunnverdi}}{\text{Prosent}} \quad (3)$$

Eksempel 1.1.1 80% av studentene i et emne får vanligvis «B» på eksamen. Hvor mange kan vi forvente får «B» på eksamen når emnet har 300 deltakere?

Løsning: I dette eksemplet veit vi ikke andelen studenter som forventes å få «B» (andel av grunnverdi), men vi veit prosenten (80%) og grunnverdien (antall deltakere). Her kan vi bruke regneregel (1), eller vi kan forsøke på egenhånd. 1% av 300 studenter er $300/100 = 3$. Dermed blir 80% av 300 det samme som $80 \cdot 3 = 240$. Vi forventer dermed at 240 studenter får «B» på eksamen.

En annen mulig måte å tenke på er at 80% er det samme som 80 hundredeler, altså $80/100 = 0.8$. Andel av grunnverdien (her 300) kan derfor regnes som $0.8 \cdot 300 = 240$.

Eksempel 1.1.2 Ole har 25 000 kroner i bruttoinntekt pr. måned. Han betaler 28% skatt av bruttoinntekten sin. Hvor mye skatt betaler Ole og hva er Oles nettoinntekt?

Løsning: Bruttoinntekten til Ole er grunnverdien. Ole betaler $0.28 \cdot 25000 = 7000$ kroner i skatt. Nettoinntekten til Ole er da $25000 - 7000 = 18000$ kroner.

Eksempel 1.1.3 En arbeidsplass har 63 ansatte, 23 av disse er under 30 år. Hvor mange prosent av de ansatte er under 30 år?

Løsning: Her kan vi bruke regel (2). Grunnverdien er antall ansatte (63) og andel av grunnverdi er antall ansatte under 30 år (23). Prosenten ansatte under 30 år er derfor $\frac{23}{63} = 0.365$, 36.5%.

Eksempel 1.1.4 Gunn kjøper en vase. Vasen koster 150 kroner inkl. moms og momsen utgjør 25%. Hva er prisen på vasen ekskl. moms?

Løsning: Her er grunnverdien prisen på vasen ekskl. moms. Prisen på vasen inkl. moms (150) utgjør 125% av grunnverdien. Vi ønsker å finne prisen på vasen ekskl. moms, da denne prisen utgjør 100%. Vi deler 150 på 125 for å finne 1%, $\frac{150}{125} = 1.2$, og multipliserer

dette tallet med 100 for å finne 100% $1.2 \cdot 100 = 120$ kroner. Hvis vi bruker regel 3 direkte blir regnestykket slik

$$\frac{150}{1.25} = 120$$

Vi kan sjekke at dette er riktig ved å ta prisen ekskl. moms og legge til momsen igjen ved hjelp av regel (1).

$$1.25 \cdot 120 = 150$$

Eksempel 1.1.5 I en skoleklasse er fem barn høyere enn 150 cm. Disse barna utgjør 20% av antall barn i klassen. Hvor mange barn er det totalt i skoleklassen?

Løsning: Her kan vi bruke regel (3). Vi veit andel av grunnverdi (fem barn) og prosent (20%). Regnestykket blir da $\frac{5}{0.2} = 25$. Det er 25 stykker i klassen.

Eksempel 1.1.6 I 2015 tjener Knut 400 000 kroner. Han har hatt en lønnsøkning på 25% siden 2014. Hva tjente Knut i 2014?

Løsning: Bruk regel (3). Grunnverdien er Knuts nye lønn på 400 000 kroner. Den nye lønna utgjør 125% av Knuts gamle lønn. Dette gir regnestykket $\frac{400000}{1.25} = 320000$. I 2014 tjente derfor Knut 320 000 kroner.

1.2 Prosentvis endring

Eksempel 1.2.1 Knut tjente 250 000 kroner i 2011. I 2012 økte lønna og han tjener nå 275 000. Hva er Knuts lønnsøkning i prosent? Det vi ønsker å se på er hva endringa i lønna er i forhold til den opprinnelige lønna. Regnestykket blir $\frac{\text{Ny lønn} - \text{Opprinnelig lønn}}{\text{Opprinnelig lønn}} = \frac{275000 - 250000}{250000} = 0.1 = 10\%$. Vi kan skrive om uttrykket for å få en regel for hvordan vi regner ut prosentvis endring,

$$\text{Prosentvis endring} = \frac{\text{Ny verdi} - \text{Opprinnelig verdi}}{\text{Opprinnelig verdi}} \quad (4)$$

Eksempel 1.2.2 I 2017 er det 330 gauper i Norge, mens i 2015 var det 360 gauper i Norge. Hva prosentvise endringa i gaupebestanden fra 2015 til 2017?

Løsning: Vi kan bruke regel (4). Ny verdi er gaupebestanden i 2017 og opprinnelig verdi er gaupebestanden i 2015. Regnestykket blir da $\frac{330 - 360}{360} = -0.083$. Gaupebestanden i Norge har falt med 8.3% fra 2015 til 2017.

Oppgavesett 1

Oppgave 1.1 Skriv som prosent

1. 0.1
2. 0.68
3. 1
4. 1.2
5. 2.5

Oppgave 1.2 Regn ut:

1. 50% av 500 000 kroner.
2. 75% av 125 450 kroner.
3. 1% av 67 500 kroner.
4. 250% av 155,55 kroner.

Oppgave 1.3 En skoleklasse har 25 elever.

1. I går var fire elever sjuke. Hvor mange prosent var sjuke den dagen?
2. 20% av elevene har norsk som favorittfag. Hvor mange elever liker norsk best?
3. Neste skoleår øker antall elever fra 25 til 28. Hvor stor økning i prosent utgjør det?

Oppgave 1.4 Lise har 40 000 kroner i bruttoinntekt pr. måned (bruttoinntekt er inntekt før skatt).

1. Lise betaler 28% skatt. Hva er Lises nettoinntekt pr måned?
2. Lise betaler 7200 kroner i husleie. Hvor mye av nettoinntekten bruker Lise på husleie?

Oppgave 1.5 Du skal lage Norges største eplepai og kjøper ei kasse med 500 epler. Denne kassa koster 5000 kroner inkl. moms.

1. Hvor mye koster kassa ekskl. moms? (Moms utgjør et tillegg på 25%)
2. Når du kommer hjem oppdager du at 50 epler er skadet. Hvor mange prosent av eplene er skada?
3. Du ønsker ikke å betale for de skadde eplene. Hvilken pris ekskl. moms er du villig til å betale?
4. Hvilken pris inkl. moms er du villig til å betale? (Legg til 25% på pris ekskl. moms)

Oppgave 1.6

1. Gunnleif er på januarsalg. Han har lyst på et par bukser som opprinnelig kosta 1000 kroner, men nå er buksa satt ned med 70%. Hvor mye koster buksa?
2. Gunnleif kjøper buksa. Han kjøper også ei matchende skjorte. Han betaler 200 kroner for skjorta. Den er satt ned med 50%. Hva kosta skjorta opprinnelig?
3. Hvor mange prosent rabatt har Gunnleif totalt fått på januarsalget?

Oppgave 1.7

1. I 2013 var det 1500 gjedder i Mjøsa. Gjeddepopulasjonen vokser og utgjør i 2014 1600 gjedder. Hvor mange prosent har populasjonen vokst?
2. I 2015 var det igjen 1450 gjedder i Mjøsa. Hvor mange prosent har populasjonen sunket?

Oppgave 1.8

1. Tre elever har glemt å ta med seg matematikk boka. Disse tre elevene utgjør 5% av den totale klassen. Hvor mange elever er det i klassen?
2. I 2014 har Line 425000 kroner i lønn, i 2013 hadde hun 400000 kroner i lønn. Hvor mange prosent har lønnen til Line steget fra 2013 til 2014?
3. En øl koster 67 kroner inkludert moms. Moms utgjør 25%. Hvor mye koster en øl eksklusive moms?
4. Reidun er student og bruker 987 kroner på øl i august. Hun får 7896 kroner i stipend hver måned. Hvor mange prosent av stipendet brukte Reidun på øl i august?
5. Hildegunn tjente i 2015 451000 kroner. Hun har hatt en lønnsøkning på 10% fra 2014. Hvor mye tjente Hildegunn i 2014?

Oppgave 1.9 Uttrykk disse brøkene som prosent, rund av til to desimaler:

1. $\frac{1}{100}$
2. $\frac{35}{67}$
3. $\frac{145}{65}$
4. $\frac{0.5}{0.8}$

Oppgave 1.10 Uttrykk disse prosentene som brøk:

1. 10%
2. 25%
3. 68%
4. 150%

Oppgave 1.11 Hva er 50% av 50%?

Fasit: Oppgavesett 1

Oppgave 1.1

1. 10%
2. 68%
3. 100%
4. 120%
5. 250%

Oppgave 1.2

1. 250 000
2. 94 087,5
3. 675
4. 388,875

Oppgave 1.3

1. 16%
2. 5
3. 12%

Oppgave 1.4

1. 28 800
2. 25%

Oppgave 1.5

1. 4000 kroner
2. 10%
3. 3600 kroner
4. 4500 kroner

Oppgave 1.6

1. 300 kroner
2. 400 kroner
3. 64.3%

Oppgave 1.7

1. 6.67%
2. 9.38%

Oppgave 1.8

1. 60
2. 6.25%
3. 53.6
4. 12.5%
5. 410000

Oppgave 1.9

1. 1%
2. 52.24%
3. 223.08%
4. 62.5%

Oppgave 1.10 Dette kan du skrive på mange forskjellige måter. Under følger tre eksempler for hver oppgave:

1. $\frac{1}{10}$, $\frac{10}{100}$ eller $\frac{100}{1000}$.
2. $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{16}$ eller $\frac{25}{100}$.
3. $\frac{17}{25}$, $\frac{34}{50}$ eller $\frac{68}{100}$.
4. $\frac{15}{10}$, $\frac{30}{20}$ eller $\frac{150}{100}$

Oppgave 1.11

1. 25%

2 Potensregning

En potens er en funksjon som uttrykkes som et grunntall opphøyd i en eksponent. En potens med grunntallet a og eksponent n skrives som a^n . Dette er det samme som a multiplisert med seg sjøl n ganger. *For eksempel er*

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Nedenfor følger en rekke nyttige regneregler og eksempler på hvorfor disse fungerer.

2.1 Regneregler

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

For eksempel: $a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

For eksempel: $\frac{a^4}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a}$, dette er det samme som $\frac{a \cdot a}{a \cdot a} \cdot a \cdot a$. Siden $\frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$ blir svaret $a \cdot a \cdot 1 = a^2$.

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

For eksempel: $(a^2)^3 = (a \cdot a)^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^6$

4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

For eksempel: $a^2 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^2$

5. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

For eksempel: $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Det er noen andre ting som også er kjekke å vite,

- $a^1 = a$. Dette er det samme som a multiplisert med seg sjøl én gang, og det blir jo bare a .
- $0^n = 0$. Null multiplisert med seg sjøl, uansett hvor mange ganger det er, blir alltid null.
- $a^0 = 1$, så lenge a ikke er null. Hvorfor det? Det er det eneste som gir mening. Tenk på den første regelen, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Det betyr at $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$. Det er bare sant hvis $a^0 = 1$.

- Hvis både grunntallet og eksponenten er null (0^0) er potensen **undefinert**. Null multiplisert med null null ganger blir bare tull.
- Hva med $0^{(-1)}$? Det blir $\frac{1}{0}$. Denne potensen er også **undefinert**. Faktisk er 0^{-n} udefinert så lenge $n > 0$. Vi kan ikke dele på null.

Ofte er det slik, ikke tull med null.

2.2 Tall på standardform

Obs! I blant annet boka «Matematikk for økonomifag» kalles det ikke standardform men normalform. Det betyr det samme, ikke la deg forvirre.

Store tall med mange siffer eller svært små desimaltall kan være lettere å uttrykke på standardform enn på vanlig form. Standardformen er mer kompakt men den inneholder all informasjon du trenger. Når vi skriver på standardform benytter vi oss av tierpotenser. Et tall er skrevet på standardform når det er skrevet som $a \cdot 10^n$. *For eksempel:*

$$8 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 800000$$

Her ser du det er fem tall bak det første tallet (8) i 800000, dette samsvarer med eksponenten ($n=5$).

$$600 = 6 \cdot 10 \cdot 10 = 6 \cdot 10^2$$

Her ser du det er to tall bak det første tallet (6) i 600, dette samsvarer med eksponenten ($n=2$). Vi kan bruke denne metoden for å skrive veldig små tall også. *For eksempel:*

$$2 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot \frac{1}{10} = 2 \cdot 0.1 = 0.2$$

Her ser du at tallet, 0.2, har en null foran. Dette samsvarer med eksponenten ($n=-1$).

$$0.004 = 4 \cdot 0.001 = 4 \cdot \frac{1}{1000} = 4 \cdot 10^{-3}$$

Her ser du at tallet, 0.004, har tre nuller foran. Dette samsvarer med eksponenten ($n=-3$).

Tabell 1: Tierpotens verdier

$n < 0$	$n > 0$
$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}$	$10^1 = 10$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{100}$	$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000}$	$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$
$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10000}$	$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$
...også videre	

Oppgavesett 2

Oppgave 2.1 Regn ut:

1. $2^2 \cdot 2^4$

2. $2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{-7}$

3. $5^0 \cdot 5^1$

4. $3^4 + 3^6$

5. $\frac{1}{3-3}$

6. $\frac{3^2 \cdot 3^4}{3^0 \cdot 3^4}$

7. $2^5 \cdot 2^{-4} \cdot \frac{4^2}{4^3}$

8. $\frac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{22}}$

9. $\left(\frac{1}{4-3}\right)^5$

10. $5^{\frac{1}{5}} \cdot \left(5^{\frac{1}{10}}\right)^2$

11. $\frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot (3-4)^5}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}$

12. $\frac{4^0 \cdot 2^3 \cdot 4^{-1}}{4^{-2} \cdot 2^4}$

13. $\frac{3^2 \cdot 3^4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^5}$

Oppgave 2.2 Skriv følgende enklest mulig:

1. $(3x)^2$

2. $(4a^3)^2$

3. $4 \cdot 4^{x-1}$

4. $(2x)^{-1} \cdot 4x$

5. $\frac{x^4 y^3}{x^3 y}$

6. $x^7 \cdot (x^{-2})^3$

$$7. (2x^{-2})^{-1} \cdot 2x^{-3}$$

$$8. (a^2b^{-1})^3$$

$$9. \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$10. \frac{\sqrt{x^3 \cdot x^5}}{(x^2)^3}$$

$$11. \frac{(2x)^0 x^{-2}}{x^{-4}}$$

$$12. x^{(a-1)} \cdot x^{(1-a)}$$

Oppgave 2.3 Forenkle mest mulig

$$1. \frac{x^3}{\sqrt{x}}$$

$$2. \frac{\left(\frac{a}{15}\right)}{\left(\frac{2a}{3}\right)}$$

$$3. \frac{(z^{-3}x^4y^2)^2}{(zxy)^4}$$

$$4. \frac{x^2-36}{4x-24}$$

Oppgave 2.4 Regn ut:

$$1. 2.5 \cdot 10^{-1}$$

$$2. 3 \cdot 10^{-5}$$

$$3. 1.2 \cdot 10^4$$

$$4. 6.8 \cdot 10^5$$

$$5. (3.2 \cdot 10^8) \cdot (1.6 \cdot 10^{-6})$$

$$6. (2 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^{-2})$$

Oppgave 2.5 Skriv på standardform:

1. 230000
2. 87000000
3. 960000000
4. 0.0045
5. 0.00000167
6. 0.000087

Fasit: Oppgavesett 2

Oppgave 2.1

1. 2^6
2. 2^2
3. 5
4. 810
5. 3^3
6. 3^2
7. 2^{-1}
8. 2
9. 4^{15}
10. $5^{\frac{2}{5}}$
11. $2^3 \cdot 3^{-16}$
12. 2
13. 1

Oppgave 2.2

1. $9x^2$
2. $16a^6$
3. 4^x
4. 2
5. xy^2
6. x
7. $\frac{1}{x}$
8. $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3$
9. $x^{\frac{5}{2}}$
10. $\frac{1}{x^2}$
11. x^2
12. 1

Oppgave 2.3

1. $x^{\frac{5}{2}}$
2. $\frac{1}{10}$
3. $\frac{x^4}{z^{10}}$
4. $\frac{(x+6)}{4}$

Oppgave 2.4

1. 0.25
2. 0.00003
3. 12000
4. 680000.
5. 512.
6. 400

Oppgave 2.5

1. $2.3 \cdot 10^5$
2. $8.7 \cdot 10^7$
3. $9.6 \cdot 10^8$
4. $4.5 \cdot 10^{-3}$
5. $1.67 \cdot 10^{-6}$
6. $8.7 \cdot 10^{-5}$

3 Regnerekkefølge, kvadratsetninger og faktorisering

3.1 Regnerekkefølge

Resultatet av flere matematiske operasjoner avhenger av rekkefølga de utføres i. Ofte brukes parenteser for å styre rekkefølga. I tillegg finnes det bestemte regler for hvilken rekkefølge du skal utføre operasjoner. Rekkefølga er,

1. Parenteser
2. Potenser
3. Multiplikasjon og divisjon
4. Addisjon og subtraksjon

Svaret kan bli feil hvis operasjonene ikke utføres riktig rekkefølge. Si du ønsker å regne ut

$$(2 + 2) \cdot 4$$

Hvis du ikke regner ut hva som er i parentesen først blir svaret

$$2 + 2 \cdot 4 = 2 + 8 = 10$$

mens det faktisk er

$$(2 + 2) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$$

Fortegnsregler

- $+\cdot + = +$, positivt tall $\cdot$ positivt tall = positivt tall
- $-\cdot + = -$, negativt tall $\cdot$ positivt tall = negativt tall
- $-\cdot - = +$, negativt tall $\cdot$ negativt tall = positivt tall

Viktig: Husk å endre tegn inni parentesen hvis det er minus foran.

Eksempel 3.1.1 Trekk sammen $-(x - 4) + (5 - x)$.

Løsning: Her er det viktig å huske å endre fortegn. $-(x - 4) = -x + 4$, dermed får vi $-x + 4 + 5 - x = 9 - 2x$.

3.2 Kvadratsetninger

Nedenfor finner du første, andre og tredjekvadratsetning. Disse er spesielt nyttige når vi jobber med andregradsuttrykk. Tredjekvadratsetning kalles også konjugatsetningen.

$$1. (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2. (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3. (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

3.3 Primtallsfaktorisering

Når du primtallsfaktoriserer skriver du et tall som et produkt av to eller flere faktorer, der disse faktorene er primtall. Et primtall er et heltall større enn 1, som kun er delelig med seg sjøl. De ti første primtallene er: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 og 29. De finnes uendelig mange primtall. Primtallsfaktorisering er nyttig når vi ønsker å forkorte en brøk, utvide en brøk eller finne minste fellesnevner. *For eksempel* kan tallet 18 primtallfaktoriseres på følgende måte

$$18 = 2 \cdot 9$$

siden $9 = 3 \cdot 3$ kan vi faktorisere ytterligere slik at

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

Et annet eksempel er 36, det kan faktorerises slik

$$36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

3.4 Faktorisering av andregradsuttrykk ved hjelp av nullpunktmetoden

Noen ganger er det ikke mulig å benytte kvadratsetningene som snarvei for faktorisering. Da kan nullpunktmetoden være til hjelp:

Nullpunktmetoden

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

der x_1 og x_2 er løsningene av den generelle andregradslikningen $ax^2 + bx + c = 0$. Siden vi må finne løsningen på ei andregradslikning for å benytte metoden passer det bra å friske opp ABC-formelen.

ABC-formelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(temaet behandles nærmere i 5. Likninger)

Eksempel 3.4.1 Vi ønsker å faktorisere andregradsuttrykket $x^2 - 2x - 8$. Vi starter med å finne nullpunktene ved hjelp av ABC-formelen. $x^2 - 2x - 8 = 0$ gir $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$. Dette gir $x_1 = 4$ og $x_2 = -2$. Ved hjelp av nullpunktmetoden veit vi nå at $x^2 - 2x - 8 = 1(x - 4)(x + 2)$. Dette gir mening for uttrykket $(x - 4)(x - (-2)) = (x - 4)(x + 2)$. Uttrykket er lik null når $x = 4$ eller $x = -2$. Vi kan multiplisere det sammen for å sjekke at det stemmer, $(x - 4)(x + 2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$.

Oppgavesett 3

Oppgave 3.1 Primtallfaktoriser følgende tall:

1. 12
2. 25
3. 60
4. 99

Oppgave 3.2 Regn ut, skriv opp utregning steg for steg:

1. $(-3) \cdot (-5)$
2. $3 \cdot 5 - 4 \cdot 3$
3. $(-3) \cdot 2 + 2 \cdot 5$
4. $-3^2 + 2$
5. $(-3)^2 + 2$
6. $6 - (-5) \cdot 2 + (-3) \cdot 5$
7. $-2 \cdot (3 + 1) + 4 \cdot 2^3$
8. $-2^4 + 3 \cdot (17 - 3^2) + (3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 5^2)$
9. $\frac{18}{3^2} - (18 - 4^2)^3$
10. $-6^2 + \frac{(1+3^2)^2}{2}$

Oppgave 3.3 Faktoriser og trekk fellesfaktor utafor parentes:

1. $3x + 6$
2. $4x^2y^2 - 2xy + 8x^2y$
3. $4x^2 - 16x + 16$
4. $x^3 - 2x^2 + x$
5. $(3xy)^2 - 12x^3y^2$

Oppgave 3.4 Regn ut ved å bruke kvadratsetningene:

1. $(x + 3)^2$
2. $(3x - 5)^2$
3. $(x + 5)(x - 5)$
4. $(3x + 4)(3x - 4)$

Oppgave 3.5 Faktoriser uttrykkene ved å bruke kvadratsetningene:

1. $x^2 + 2x + 1$
2. $25 - 10x + x^2$
3. $x^2 - 1$
4. $x^2 - 6x + 9$

Oppgave 3.6 Regn ut:

1. $5(x - 2)$
2. $-3(x - 3)$
3. $2a - a(2 - b) + 3(5 + b)$
4. $3(x + 1) - 5(x - 2) + 3(2 - 3x)$
5. $(2x + 1)^2$
6. $(x + 5)(x - 1) + 25$
7. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$

Oppgave 3.7

1. Forenkle mest mulig $\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2$
2. Multipliser og trekk sammen $(3x + 2)(3x + 2) - (3x + 2)(3x - 2)$
3. Multipliser og trekk sammen $x(1 + y^2) - 2x(y^2 - y) - xy(2 - y)$
4. Forkort $\frac{x^2 - 9}{2x + 6}$ (Hint: Tredje kvadratsetning)
5. Forenkle mest mulig $\frac{(z^3 x^{-2} y^7)^2}{(zxy)^5}$. Hva skjer hvis $x = y$?

Oppgave 3.8 Benytt nullpunktmetoden for å faktorisere uttrykkene:

1. $x^2 - 7x + 10$
2. $-x^2 - x + 12$
3. $2x^2 - 4x - 70$
4. $4x^2 + 36x + 32$

Fasit: Oppgavesett 3

Oppgave 3.1

1. $2 \cdot 2 \cdot 3$
2. $5 \cdot 5$
3. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$
4. $3 \cdot 3 \cdot 11$

Oppgave 3.2

1. 15
2. 3
3. 4
4. -7
5. 11
6. 1
7. 24
8. 6
9. -6
10. 14

Oppgave 3.3

1. $3(x+2)$
2. $2xy(2xy-1+4x)$
3. $4(x^2+4x+4)$
4. $x(x^2-2x+1)$
5. $3x^2y^2(3-4x)$

Oppgave 3.4

1. x^2+6x+9
2. $9x^2-30x+25$
3. x^2-25
4. $9x^2-16$

Oppgave 3.5

1. $(x+1)^2$
2. $(5-x)^2$ eller $(x-5)^2$
3. $(x-1)(x+1)$
4. $(x-3)^2$ eller $(3-x)^2$

Oppgave 3.6

1. $5x - 10$
2. $-3(x-3) = (-3 \cdot x) + (-3) \cdot (-3) = -3x + 9.$
3. $3b + ab + 15$
4. $19 - 11x$
5. $4x^2 + 4x + 1.$
6. $x^2 + 4x + 20$
7. 3

Oppgave 3.7

1. x
2. $12x + 8$
3. x
4. $\frac{x-3}{2}$
5. $z \left(\frac{y}{x}\right)^9$. Hvis $x = y$, $z \left(\frac{y}{x}\right)^9 = z.$

Oppgave 3.8

1. $(x-5)(x-2)$
2. $-(x-3)(x+4)$
3. $2(x-7)(x+5)$
4. $4(x+1)(x+8)$

4 Brøkgregning

Vi skriver brøk som

$$\frac{a}{b}$$

der $b \neq 0$. Det betyr at b kan være alle mulige tall unntatt null. Det gir ikke mening å dividere et tall med null.

$$\frac{a}{0} \rightarrow \text{FEIL}$$

Hvis du for eksempel skriver inn $\frac{4}{0}$ på kalkulatoren vil du få ei feilmelding. Derimot er det ikke noe problem å dele null på noe.

$$\frac{0}{b} = 0 \rightarrow \text{OK}$$

Tallet som står over brøkestreken kalles teller og tallet som står under brøkestreken kalles nevner.

$$\frac{\text{teller}}{\text{nevner}}$$

Forkorting av brøk

Når vi deler teller og nevner på samme tallet endrer ikke verdien til brøken seg. Det vil si at hvis det finnes en eller flere fellesfaktorer over og under brøkestreken, kan vi stryke disse uten at brøkens verdi endres.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$$

For eksempel:

$$\frac{18}{36} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Dette gjelder også når du regner med bokstaver. For eksempel:

$$\frac{2x^2}{3x} = \frac{2 \cdot x \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{2x}{3}$$

Noen ganger kan vi ikke forkorte noen ting. For eksempel:

$$\frac{2x^2}{3+x} = \frac{2 \cdot x \cdot x}{3+x}$$

Her er ikke x med i alle leddene i nevner og er derfor ikke en fellesfaktor. Det er en ganske vanlig feil å tro at $\frac{2x^2}{3+x}$ kan forkortes til $\frac{2x}{3}$, men det er feil!

Utvidelse av brøk

Hvis vi ønsker kan vi også utvide en brøk, da multipliserer vi telleren og nevneren med samme tall:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

For eksempel

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

En feil mange gjør er å legge til samme verdi over og under brøkstreken. Sann som dette

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a+c}{b+c}$$

Det er feil. For eksempel er

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

men

$$\frac{1+5}{2+5} = 0.88$$

De er ikke like.

Fortegnsregler

Husk at minus og minus blir pluss. Dette gjelder også for brøk. Hvis du har en minus foran både teller og nevner forsvinner minustegnet,

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Det spiller ingen rolle om du har minus i enten teller eller nevner, hele brøken er negativ. De tre uttrykkene under betyr alle det samme,

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$$

Deling av brøk

Telleren i en brøk kan deles opp om det er ønskelig og nødvendig. Hvis vi har

$$\frac{a-b-c}{d}$$

kan det også skrives som

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} - \frac{c}{d}$$

Du kan ikke dele opp nevner! *For eksempel*

$$\frac{a+3}{b+4} = \frac{a}{b+4} + \frac{3}{b+4}$$

men

$$\frac{a+3}{b+4} \neq \frac{a+3}{b} + \frac{a+3}{4}$$

4.1 Addisjon og fellesnevner

Fellesnevner

Hvis to brøker har **fellesnevner**, er det bare å legge tellerne sammen og skrive summen av tellerne over fellesnevneren,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

For eksempel:

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

Ulik nevner

Hvis to brøker har **ulik nevner** må vi først finne en fellesnevner før vi kan legge de to brøkene sammen.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ?$$

Den enkleste måten å finne en fellesnevner på er å multiplisere teller og nevner til den første brøken med nevneren til den andre brøken, og motsatt.

$$\frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{d \cdot b}$$

For eksempel:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$$

Noen ganger kan en slik fellesnevner bli veldig stor eller gi et uttrykk som er vanskelig å jobbe med. Da er det kjekt å kunne finne minste fellesnevner.

Finne minste fellesnevner

Minste fellesnevner er det minste tallet som er delelig på alle nevnerne. *For eksempel:*

$$\frac{5}{36} + \frac{1}{12}$$

Her kan nevnerne faktorerises til

$$36 = 12 \cdot 2 = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \cdot 2$$

For at fellesnevneren skal være delelig på 36 må den inneholde $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ og får at den skal være delelig på 12 må den inneholde $3 \cdot 2 \cdot 2$. Minste fellesnevner er altså $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (36).

$$\frac{5}{36} + \frac{1}{12} = \frac{5}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{5}{36} + \frac{3}{36} = \frac{8}{36}$$

Noen ganger er det ikke like klart hva som er minste fellesnevner. *For eksempel:*

$$\frac{1}{15} + \frac{2}{12} + \frac{3}{16}$$

her kan nevneren faktorerises til $15 = 5 \cdot 3$, $12 = 4 \cdot 3$ og $16 = 4 \cdot 4$. Minste fellesnevner blir $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4$. Den er delelig med 15 fordi $5 \cdot 3$ finnes i fellesnevneren, den er delelig med 12 fordi $4 \cdot 3$ også finnes i fellesnevneren og den er delelig med 16 fordi $4 \cdot 4$ også er å finne i fellesnevneren.

En brøk og et helt tall

For å addere et tall til en brøk må vi først multiplisere og dividere tallet med nevneren til brøken, også beregne summen:

$$\frac{a}{b} + c = \frac{a}{b} + \frac{c \cdot b}{b} = \frac{a + c \cdot b}{b}$$

For eksempel:

$$\frac{2}{9} + 3 = \frac{2}{9} + \frac{3 \cdot 9}{9} = \frac{29}{9}$$

4.2 Multiplikasjon

Med et tall

Når vi multipliserer en brøk med et tall skal tallet multipliseres med teller (multipliser det inn over brøkstreken).

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

For eksempel:

$$\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$$

eller

$$\frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$$

To brøker

Når vi multipliserer to brøker så er det bare å multiplisere tellerne med hverandre, og nevnerne med hverandre,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

4.3 Brudden brøk

Noen ganger er telleren en brøk og/eller nevneren en brøk. Da har vi en brudden brøk. Vi kan forenkle slike brøker ved hjelp av en multiplikasjons regelen.

Brøk i teller

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{b}\right)}{c \cdot b} = \frac{a}{c \cdot b}$$

For eksempel:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{\left(\frac{3 \cdot 4}{4}\right)}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$$

Brøk i nevner

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{\left(\frac{b \cdot c}{c}\right)} = \frac{a \cdot c}{b}$$

For eksempel:

$$\frac{2}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{3}{5}\right)} \cdot \frac{5}{5} = \frac{2 \cdot 5}{\left(\frac{3 \cdot 5}{5}\right)} = \frac{10}{3}$$

Brøk i teller og nevner

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{\left(\frac{a \cdot b}{b}\right)}{\left(\frac{c \cdot b}{d}\right)} = \frac{a}{\left(\frac{c \cdot b}{d}\right)} = \frac{a \cdot d}{\left(\frac{c \cdot b \cdot d}{d}\right)} = \frac{a \cdot d}{c \cdot b}$$

Det siste eksemplet har følgende tommelfingerregel (bare snu brøken i nevner på hodet og multipliser med brøken i teller):

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right)$$

For eksempel:

$$\frac{\left(\frac{2}{4}\right)}{\left(\frac{3}{5}\right)} = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Oppgavesett 4

Oppgave 4.1 Forkort:

1. $\frac{15}{20}$

2. $\frac{x^2}{3x}$

3. $\frac{a^2b^2}{a^3b}$

4. $\frac{aa+ab}{2a}$

Oppgave 4.2 Regn ut og forkort:

1. $\frac{5}{3} + \frac{4}{3}$

2. $\frac{3}{4} - 3$

3. $\frac{2}{8} + \frac{3}{5}$

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{6}$

5. $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$

6. $\frac{\left(\frac{5a}{8}\right)}{3} + \frac{\left(\frac{7a}{6}\right)}{4}$

7. $\frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x+1}$

8. $\frac{2x}{x-1} + \frac{4x}{x+1}$

Oppgave 4.3 Finn minste fellesnevner, sett på felles brøkstrek, regn ut og forkort:

1. $\frac{3}{4} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$

2. $\frac{1}{2} + \frac{4}{15} - \frac{3}{10}$

3. $\frac{3}{36} + \frac{1}{18} - \frac{2}{9}$

4. $\frac{1}{6} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2}$

5. $\frac{3}{y} - \frac{2}{3y} - \frac{4}{6y}$

6. $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{3}$

7. $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{4}{3x}$

Oppgave 4.4 Regn ut og forkort:

1. $5 \cdot \frac{25}{6}$

2. $\frac{5}{9} \cdot \frac{7}{9}$

3. $\frac{2}{\left(\frac{3}{6}\right)}$

4. $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{8}$

5. $\frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{2}{7}\right)}$

6. $\frac{\left(\frac{8}{xy}\right)}{\left(\frac{x^2}{3}\right)}$

7. $\frac{12}{\left(\frac{5}{z}\right)}$

8. $\frac{\left(\frac{x}{4}\right)}{3}$

Oppgave 4.5 Regn ut og forkort:

1. $\frac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$

2. $\frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{15}}$

3. $\frac{\frac{4}{5}-\frac{2}{25}}{\frac{1}{10}-\frac{3}{5}}$

4. $\frac{\left(\frac{3y}{2}\right)}{\left(\frac{9}{y^2}\right)}$

5. $\frac{b+\frac{b}{2}}{2b-\frac{b}{3}}$

6. $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ (Hint! Tredje kvadratsetning)

$$7. \frac{\frac{a}{2x-1} - \frac{a}{2x+1}}{\frac{1}{4x^2-1}}$$

$$8. \frac{3(2x-1)+5}{(2x-1)}$$

$$9. \frac{1}{3a} + \frac{1}{4b} + \frac{3a-8b}{6ab}$$

$$10. \frac{4}{a} + \frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{a(a+1)}$$

Oppgave 4.6

1. Forkort:

$$\frac{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a-1}$$

2. Forkort:

$$\frac{a-1}{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}$$

Oppgave 4.7 Skriv følgende brøker på tre andre forskjellige måter:

$$1. \frac{4}{3}$$

$$2. \frac{140}{360}$$

$$3. \frac{99}{297}$$

Fasit: Oppgavesett 4

Oppgave 4.1

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{x}{3}$
3. $\frac{b}{a}$
4. $\frac{a+b}{2}$

Oppgave 4.2

1. 3
2. $-\frac{9}{4}$
3. $\frac{17}{20}$
4. $\frac{x+2}{6}$
5. $\frac{5}{9}$
6. $\frac{a}{2}$
7. $\frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$
8. $\frac{x(6x-2)}{(x-1)(x+1)}$

Oppgave 4.3

1. 20, $\frac{5}{4}$
2. 30, $\frac{7}{15}$
3. 36, $-\frac{1}{12}$
4. 18, $\frac{2}{9}$
5. 6y, $\frac{5}{3y}$
6. 12, $\frac{3+2x}{4}$
7. 6x, $\frac{1}{6x}$

Oppgave 4.4

1. $\frac{125}{6}$

2. $\frac{35}{81}$

3. 4

4. $\frac{3}{56}$

5. $\frac{14}{9}$

6. $\frac{24}{x^3y}$

7. $\frac{12z}{5}$

8. $\frac{x}{12}$

Oppgave 4.5

1. $\frac{9}{10}$

2. $-\frac{1}{2}$

3. $-\frac{36}{25}$

4. $\frac{y^3}{6}$

5. $\frac{9}{10}$

6. $x + \sqrt{2}$

7. $2a$

8. $3 + \frac{5}{(2x-1)}$

9. $\frac{3}{4b} - \frac{1}{a}$

10. $\frac{4}{a}$

Oppgave 4.6

1. $\frac{1}{(a+1)}$

2. $\frac{(a-1)^2}{(a+1)}$

Oppgave 4.7

1. $\frac{8}{6}$, 1.33 og $\frac{40}{30}$
2. $\frac{7}{18}$, 0.39 og $\frac{28}{72}$
3. $\frac{33}{99}$, 0.33 og $\frac{11}{33}$

5 Likninger

5.1 Førstegradslikninger

Når du utfører en matematisk operasjon på ei likning er det viktig å huske at likninga må balanseres. Alt du gjør på den ene sida må du også gjøre på den andre sida! Følgende regler kan brukes ved løsning av førstegradslikninger:

- Vi kan legge til og trekke fra samme tall på begge sider av likhetstegnet
- Vi kan multiplisere og dividere med samme tall på begge sider av likhetstegnet. (Husk at alle ledd på begge sider må multipliseres/divideres)
- Vi kan flytte et ledd over til den andre siden av likhetstegnet ved å endre fortegn

Eksempel 5.1.1 Løs likninga $3x - 4 = 5$.

Løsning: For å få x aleine på venstre siden må vi først flytte -4 over til høyre side. $3x = 4 + 5$. Deretter dividerer vi begge sider med 3 slik at $\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \rightarrow x = 3$.

Eksempel 5.1.2 Løs likninga $12 + \frac{x}{6} = 14$.

Løsning: Først flytter vi 12 over på høyre side slik at $\frac{x}{6} = 2$. Deretter multipliseres begge sider med 6 slik at $x = 12$.

Eksempel 5.1.3 Løs likninga $\frac{12}{y} - 12 = 3$.

Løsning: Først multipliseres alle ledd med y slik at $12 - 12y = 3y$. Flytt deretter $-12y$ over til høyre siden slik at $12 = 15y$. Divider begge sider med 15, dermed er $y = \frac{12}{15}$. Dette kan forenkles ytterligere til $y = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{5}$.

Eksempel 5.1.4 En boks med 75 kaker veier 3 kg. Selve kakeboksen veier 375 gram. Hvor mye veier en kake?

Løsning: Først må vi sette opp likninga. En kake veier x gram så 75 kaker veier $75 \cdot x$ gram. Husk at 3 kg er det samme som 3000 gram. Likninga blir da $3000 = 75x + 375$.

Nå kan vi løse likninga. Start med å flytte 375 over på venstre siden:

$$3000 - 375 = 75x$$

Deretter dividerer vi begge sider med 75:

$$\frac{2625}{75} = \frac{75}{x}$$

Dette gir svaret $x = 35$. En kake veier 35 gram.

Eksempel 5.1.4 Løs likninga $\frac{x}{6} - \frac{2-x}{4} = \frac{x}{3} + 1$.

Løsning: Først blir vi kvitt brøkene. Finn minste fellesnevner ved hjelp av faktorisering, det gir $6 = 2 \cdot 3$, $4 = 2 \cdot 2$ og $3 = 3$. Minste fellesnevner er $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. (Er du usikker på dette, gå tilbake å se på notatet om brøkgregning).

Deretter multipliserer vi alle ledd med tallet 12:

$$\frac{x}{6} \cdot 12 - \frac{2-x}{4} \cdot 12 = \frac{x}{3} \cdot 12 + 1 \cdot 12$$

$$\frac{x \cdot 12}{6} - \frac{2 \cdot 12 - x \cdot 12}{4} = \frac{x \cdot 12}{3} + 1 \cdot 12$$

Husk at $-\frac{2 \cdot 12 - x \cdot 12}{4}$ kan skrives $-\frac{2 \cdot 12}{4} + \frac{12 \cdot x}{4}$. (Del opp brøk og bytt fortegn). Da blir regnestykket:

$$\frac{12x}{6} - \frac{24}{4} + \frac{12x}{4} = \frac{12x}{3} + 12$$

$$2x - 6 + 3x = 4x + 12$$

Flytt -6 over på høyre side og flytt $4x$ over på venstre side:

$$2x - 4x + 3x = 12 + 6$$

$$x = 18$$

Eksempel 5.1.5 Ei mor er 50 år gammel og dattera hennes er 14 år. Hvor mange år går det før mora er tre ganger så gammel som dattera?

Løsning: Først må vi sette opp ei likning. Den ukjente verdien vi lurte på her er hvor mange år det går før mora er tre ganger så gammel som dattera, vi kan kalle den y . Om y år er mora $50 + y$ år og dattera er $14 + y$ år. Mora er altså tre ganger så gammel som dattera når:

$$\frac{50+y}{14+y} = 3$$

For å løse likninga multipliserer vi først begge sider med $14 + y$. Dette gir:

$$50 + y = 3 \cdot 14 + 3 \cdot y$$

$$50 + y = 42 + 3y$$

Flytt 42 over på venstre side og y over på høyre side:

$$50 - 42 = 3y - y$$

$$8 = 2y$$

Divider begge sider med 2. Svaret er $y = 4$. Om 4 år er mora tre ganger så gammel som dattera.

5.2 Andregradslikninger

Andregradslikninger er likninger som inneholder et polynom av andregrad. De uttrykkes på formen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

der a , b , og c er vilkårlige konstanter. *For eksempel:*

$$2x^2 + 3x + 6 = 0$$

her er $a = 2$, $b = 3$ og $c = 6$. Tabell 2 gir en oversikt over hvordan du kan gå frem for å løse forskjellige type andregradslikninger.

Tabell 2: Hvordan løse andregradslikninger?	
Ingen konstantledd. $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$ $x \cdot (ax + b) = 0$ $x = 0$ eller $ax + b = 0$ $x = 0$ eller $x = -\frac{b}{a}$
Ingen førstegradsledd. $b = 0$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$
Generell	$ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (ABC formel) $b^2 - 4ac > 0$ gir to reelle løsninger $b^2 - 4ac = 0$ gir en reel løsning $b^2 - 4ac < 0$ gir ingen reel løsning

Eksempel 5.2.1: ABC-formel Løs likninga $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Løsning: Her er $a = 1$, $b = -3$ og $c = -4$. Vi setter dette inn i formelen ovenfor og får,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

Det gir løsningene $x_1 = 4$ og $x_2 = -1$.

Eksempel 5.2.3: c=0 Løs likninga $4x^2 + 4x = 0$

Løsning: Skriv om likninga. Siden $4x^2 + 4x = 0$ har en fellesfaktor x kan vi sette den utafør en parentes $x(4x + 4) = 0$. En av løsningene er at $x_1 = 0$ fordi $0 \cdot (4 \cdot 0 + 4) = 0$. Den andre løsninga som gir $x(4x + 4) = 0$ er hvis $4x + 4 = 0$. Løs likninga $4x + 4 = 0$. Det gir $x_2 = -1$.

Eksempel 5.2.4: $b=0$ Løs likninga $4x^2 - 1 = 0$

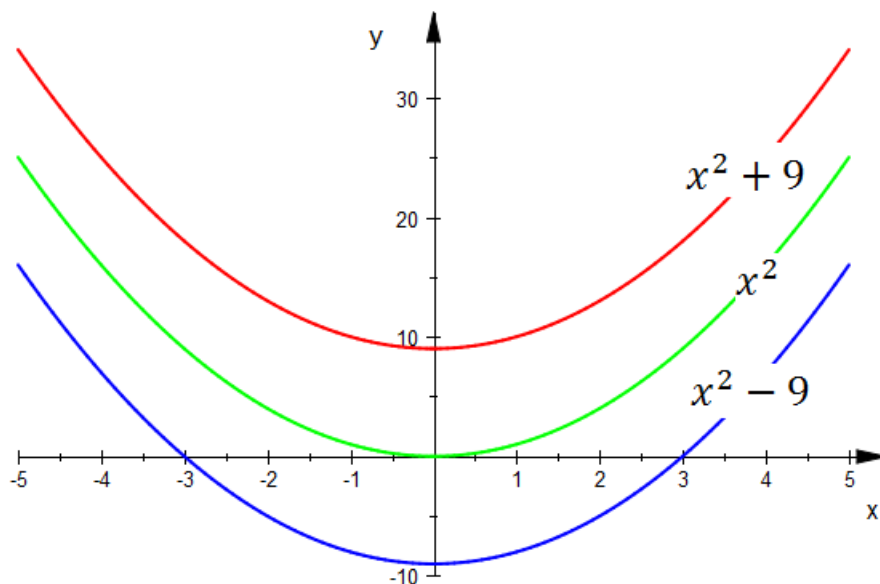
Løsning: Vi flytter -1 over til høyre side slik at $4x^2 = 1$. Ta kvadratroten av begge sidene $\sqrt{4x^2} = \sqrt{1}$. Venstresiden gir $\sqrt{4x^2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x^2} = 2\sqrt{x^2}$, slik at vi får $2\sqrt{x^2} = 1$. Divider begge sider med 2. $\sqrt{x^2} = \frac{1}{2}$. Dette gir to løsninger. $x_1 = -\frac{1}{2}$ og $x_2 = \frac{1}{2}$

Eksempel 5.2.6 Løs likninga $x^2 - x - 12 = 0$

Løsning: Her kan vi bruke tredje kvadratsetning for å faktorisere. $x^2 - x - 12 = 0$ er det samme som $(x+3)(x-4) = 0$. For at $(x+3)(x-4) = 0$ må enten $(x+3) = 0$ eller $(x-4) = 0$. Det første uttrykket gir $x_1 = -3$ og det andre uttrykket gir $x_2 = 4$.

Eksempel 5.2.7 Løs likninga $x^2 - 6x + 9 = 0$

Løsning: Det er flere måter å løse likninga på. Du kan bruke ABC-formelen eller faktorisere uttrykket. Husk andre kvadratsetning, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Vi har $a = 1$ og $b = 3$. Da veit vi at $x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3)$. Likninga har bare en reell løsning, $x = 3$. Bruker vi ABC-formelen ser vi på formen $ax^2 + bx + c$ der $a = 1$, $b = -6$ og $c = 9$. Da får vi $x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$. Hva er det som avgjør om vi har ingen, en eller to reelle løsninger?



Figur 1: Hvor mange reelle løsninger har vi for $f(x) = 0$?

$x^2 + 9 = 0$ har ingen reelle løsninger.

$x^2 = 0$ har en reell løsning, $x = 0$.

$x^2 - 9 = 0$ har to reelle løsninger, $x = \pm 3$

Hvor mange reelle løsninger som finnes avgjøres av hvor bunn eller toppunktet til funksjonen er plassert. Den blå grafen har ett bunnpunkt som er plassert slik at grafen krysser x-aksen to ganger og vi har to reelle løsninger. Den grønne grafen har et bunnpunkt der grafen tangerer x-aksen akkurat i bunnpunktet og vi har en reel løsning. Den røde grafen har ingen reelle løsninger. Vi kan avgjøre hvor mange reelle løsninger vi får ved å se på hvilken verdi $b^2 - 4ac$ (fra ABC-formelen) har. Hvis $b^2 - 4ac > 0$ har vi to reelle løsninger. Hvis $b^2 - 4ac = 0$ har vi en reel løsning. Hvis $b^2 - 4ac < 0$ har vi ingen reelle løsninger. Hvis vi har en reel løsning kan vi bruke 1. eller 2. kvadratsetning for å faktorisere andregradsuttrykket.

5.3 Likningssett med to ukjente

I mange oppgaver støter vi på en situasjon der vi må løse to likninger med to ukjente variabler samtidig. Dette kalles et likningssett med to ukjente. For å løse et likningssett med to ukjente trenger vi to likninger. Nedenfor finner du to vanlige fremgangsmåter for å løse likningssett.

5.3.1 Metode 1: Innsetting

Anta at vi har to likninger med to ukjente. Først bestemmer man et uttrykk for den første ukjente variabelen ved hjelp av den første likninga. Deretter settes dette uttrykket inn i den andre likninga.

Eksempel 5.3.1

$$2x + 5y = -4$$

$$x - 2y = 7$$

Løsning: Først løser vi den andre likninga med hensyn på x . Da får vi uttrykket $x = 7 + 2y$. Dette setter vi inn for x i den første likninga. Da får vi uttrykket

$$2 \cdot (7 + 2y) + 5y = -4$$

Denne likninga løser vi på vanlig måte for y . Først regner vi ut $2 \cdot (7 + 2y) + 5y = 14 + 9y$. Da får vi $14 + 9y = -4$. Deretter løser vi likninga med hensyn til y , det gir uttrykket $y = -2$. Når vi veit hva y er, kan vi sette det tilbake inn i uttrykket $x = 7 + 2y$ for å finne x . $x = 7 + 2 \cdot (-2) = 3$. Løsninga av likningssettet er $x = 3$ og $y = -2$, eller $(x, y) = (3, -2)$.

5.3.2 Metode 2: Addisjon (eliminering)

Noen ganger kan vi legge sammen likningene for å eliminere en av variablene. Dette gjør vi ved å legge sammen begge sidene til høyre for likhetstegnet og begge sidene til venstre for likhetstegnet, slik at vi får ei likning i stedet for to.

Eksempel 5.3.2

$$2x + 5y = -4$$

$$-2x + 4y = -14$$

Løsning: Når vi legger sammen disse likningene får vi:

$$2x + 5y - 2x + 4y = -4 - 14$$

$$9y = -18$$

$$y = -2$$

x verdien kan vi finne ved å sette inn $y = -2$ i en av de to likningene vi startet med. Bruker vi for eksempel den første, blir det $2x + 5 \cdot (-2) = -4$. Når vi løser denne likninga med hensyn til x blir svaret $x = 3$. Løsninga på likningssettet er derfor $y = -2$ og $x = 3$, eller $(x, y) = (3, -2)$.

Eksempel 5.3.3 Noen ganger er ikke muligheten for eliminasjon like tydelig som ovenfor, og vi må bearbeide en eller begge likningene før vi legger de sammen. Løs likningssettet:

$$4x - 3y = 11$$

$$x + 5y = 20$$

Løsning: Vi multipliserer den første likninga med 5 og den andre likninga med 3. Da får vi likningssettet:

$$20x - 15y = 55$$

$$3x + 15y = 60$$

Vi legger de sammen og får $23x = 115$. Dette gir $x = 5$. Sett det inn i en av likningene ovenfor, for eksempel den første. Det gir $4 \cdot 5 - 3y = 11$ og løsninga $y = 3$. Løsninga på likningssettet er $(x, y) = (5, 3)$

Oppgavesett 5

Førstegradslikninger

Oppgave 5.1 Løs:

1. $5x + 3x + 6 - 2 = 7x + 6$
2. $\frac{x}{2} + x - 10 = 20$
3. $(a + 2)3 + 4(2a - 1) = 13$
4. $a + 1 = 2a - 3 + (-2a)$
5. $\frac{y}{3} - 2y - 20 = \frac{y}{4} + 3$
6. $\frac{3x}{2} + 5 = \frac{10x}{4} - 1$
7. $\frac{1}{2}(3 - 4x) + \frac{4}{2}(x + 3) = -\frac{1}{4}(x + 1) + 2$
8. $4\left(3x - \frac{4}{6}\right) + 2\left(x - \frac{2}{3}\right) = 10$

Annengradslikninger

Oppgave 5.2 Bruk ABC-formelen og løs:

1. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
2. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
3. $y^2 + 5y - 150 = 0$

Oppgave 5.3 Løs uten å bruke ABC-formelen

1. $2x^2 = 50$
2. $3x^2 - 12x = 0$
3. $4x^2 = 16$
4. $3x^2 = 9$
5. $5x^2 - 25 = 0$
6. $\frac{3}{2}x^2 + 2x = 0$
7. $\frac{2}{3}x^2 - 5 = 0$
8. $-2x^2 + 3x = 0$
9. $3x^2 - 12 = 0$

Oppgave 5.4 (Blanding av første og annengradslikninger) Løs likningene:

1. $-\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{8} = 0$
2. $\frac{x^2-16}{5} = 0$
3. $\frac{x}{3} = 12 - x$
4. $2x - 5(x - 2) = 13$
5. $x^2 - 4x - 5 = 0$
6. $x^2 - 2x - 3 = 0$
7. $\frac{x^2-2x}{x+1} = 0$
8. $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$
9. $2x^2 - (x-3)^2 = 2(3x+20)$
10. $\sqrt{x^2-9} = 0$
11. $3(x + \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(5+4x) = 0$
12. $\sqrt{\frac{x}{3}} + 6 - 3 = -3$

Likningssett med to ukjente

Oppgave 5.5 Løs likningssettene ved hjelp av substitusjonsmetoden:

1. $x + y = 1, x - y = 1$
2. $2y + 2x = 4, -2y + x = 2$
3. $2x + 5y = -4, x - 2y = 7$

Oppgave 5.6 Løs likningsettene ved hjelp av addisjonsmetoden:

1. $2x + y = 3, x - y = 3$
2. $4a + b = 8, -4a + b = 0$
3. $2s - 3t = 21, 3s + 2t = -1$

Oppgave 5.7 Løs likningsettet

1. $x + y = 64, 32 + x = y$
2. $4x + 10y = -8, 2x - 4y = 14$
3. $-2x + 3y = 6, 9x - 3y = 15$
4. $2x + 2y = 2, x - y = 5$

Oppgave 5.8 Tre barn og to voksne betaler til sammen 56 kroner for bussbilletter. En voksenbillett koster dobbelt så mye som en barnebillett. Hvor mye koster en voksenbillett og hvor mye koster en barnebillett?

Oppgave 5.9 To kilo epler og tre kilo appelsiner koster til sammen 68 kroner. Tre kilo epler og en kilo appelsiner koster 60 kroner. Hvor mye koster en kilo epler og hvor mye koster en kilo appelsiner?

Oppgave 5.10 Til en fotballkamp ble det solgt 432 billetter. Dette ga ei inntekt på 18 240 kroner. En barnebillett koster 20 kroner og en voksenbillett 50 kroner. Hvor mange barn og voksne så kampen?

Oppgave 5.11 (tre ukjente) OBS: Når vi løser likninger med flere ukjente trenger vi like mange likninger som vi har ukjente for at likningssystemet skal la seg løse.

1. $x + y = 3, x + z = -1, y + z = 0$

2. $2x - y + z = 12, x + y - z = -3, x + 3y - 2z = -11$

Oppgave 5.12 (tre ukjente) Anne, Berit og Christian er til sammen 100 år. Berit er dobbelt så gammel som Anne. Christian er 8 år yngre enn Anne. Hvor gammel er henholdsvis Anne, Berit og Christian?

Fasit: Oppgavesett 5

Oppgave 5.1

1. $x = 2$
2. $x = 20$
3. $a = 1$
4. $a = -4$
5. $y = -12$
6. $x = 6$
7. $x = -23$
8. $x = 1$

Oppgave 5.2

1. $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$
2. $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -1$
3. $x_1 = 10, x_2 = -15$

Oppgave 5.3

1. $x_1 = 5, x_2 = -5$
2. $x_1 = 0, x_2 = 4$
3. $x = \pm 2$
4. $x = \pm\sqrt{3}$
5. $x = \pm\sqrt{5}$
6. $x = -\frac{4}{3}$
7. $x_1 = -\sqrt{\frac{15}{2}}, x_2 = \sqrt{\frac{15}{2}}$
8. $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$
9. $x = \pm 2$

Oppgave 5.4

1. $x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{3}{2}$
2. $x = \pm 4$
3. $x = 9$
4. $x = -1$
5. $x_1 = 5$ og $x_2 = -1$
6. $x_1 = 3$ og $x_2 = -1$
7. $x = 2$
8. $x = 1$
9. $x = \pm 7$
10. $x = \pm 3$
11. $x = \frac{11}{2}$
12. $x = -18$

Oppgave 5.5

1. $(x, y) = (1, 0)$
2. $(x, y) = (2, 0)$
3. $(x, y) = (3, -2)$

Oppgave 5.6

1. $(x, y) = (2, -1)$
2. $(a, b) = (1, 4)$
3. $(s, t) = (3, -5)$

Oppgave 5.7

1. $(x, y) = (16, 48)$
2. $(x, y) = (3, -2)$
3. $(x, y) = (3, 4)$
4. $(x, y) = (3, -2)$

Oppgave 5.8

- En barnebillett koster 8 kroner og en voksenbillett koster 16 kroner.

Oppgave 5.9

- En kilo epler koster 16 kroner og en kilo appelsiner koster 12 kroner.

Oppgave 5.10

- Antall barn er 112, antall voksne er 320.

Oppgave 5.11

1. $(x, y, z) = (1, 2, -2)$

2. $(x, y, z) = (3, -2, 4)$

Oppgave 5.12

- Anne er 27 år gammel, Berit er 54 år gammel og Christian er 19 år gammel.

6 Funksjoner

6.1 Hva er en funksjon?

y er en funksjon av x hvis hver mulige verdi for x gir nøyaktig en verdi for y . x kalles ofte for den uavhengige variabel, og y for den avhengige variabel. En funksjon kan representeres ved et funksjonsuttrykk ($f(x)$), en graf eller en tabell.

6.1.1 Hva beskriver en funksjon?

Definisjonsmengde og verdimengde Definisjonsmengden til en funksjon viser hvilke x -verdier funksjonen gjelder for. For eksempel veit vi at for funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ så kan ikke $x = 0$, fordi vi kan ikke dele på null. Definisjonsmengden til funksjonen f skrives ofte D_f . Verdimengden sier noe om hvilke verdier $f(x)$ kan bli gitt de x -verdiene funksjonen gjelder for. Hvis vi ser på $f(x) = \frac{1}{x}$ veit vi at $f(x)$ aldri kan bli null, fordi x aldri kan bli null (se eksempel 6.4.1). Verdimengden til funksjonen f skrives V_f .

Hvor er grafen på vei?

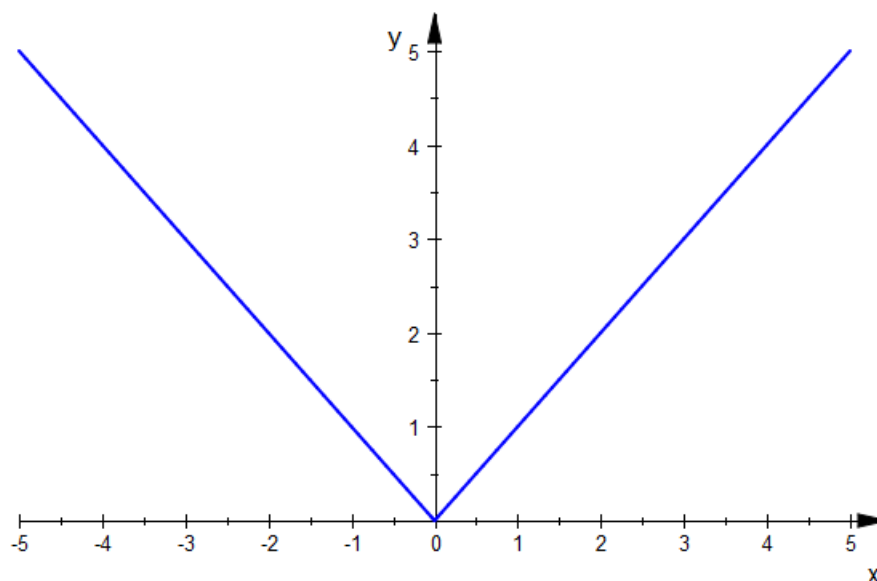
- En funksjon f er voksende hvis, for alle $x_2 > x_1$ så har vi at $f(x_2) \geq f(x_1)$. Funksjonen beveger seg enten oppover eller bortover.
- En funksjon f er strengt voksende hvis, for alle $x_2 > x_1$ så har vi at $f(x_2) > f(x_1)$. Funksjonen beveger seg alltid oppover.
- En funksjon f er avtagende hvis, for alle $x_2 > x_1$ så har vi at $f(x_2) \leq f(x_1)$. Funksjonen beveger seg enten nedover eller bortover.
- En funksjon f er strengt avtagende hvis, for alle $x_2 > x_1$ så har vi at $f(x_2) < f(x_1)$. Funksjonen beveger seg alltid nedover.

Vi kan også si noe om hvordan funksjonen oppfører seg på et gitt intervall, for eksempel fra -10 til 10. Vi trenger ikke alltid undersøke hele definisjonsmengden.

Topp og bunnpunkter Noen funksjoner har klare topp og bunnpunkter som viser hvor funksjonen snur fra å være voksende til avtagende eller motsatt. Noen ganger kalles disse punktene lokale maksimum og minimumspunkter. Funksjoner som er strengt voksende har ingen topppunkter og funksjoner som er strengt avtagende har ingen bunnpunkter. Andregradsfunksjoner har enten et bunnpunkt eller et toppunkt. Noen funksjoner, som $\sin(x)$, har uendelig mange topp og bunnpunkter.

Nullpunkter Nullpunkter er punkter der funksjonen $f(x)$ skjærer y -aksen, altså der $f(x) = 0$.

Kontinuitet En funksjon $y = f(x)$ er kontinuerlig dersom dersom grafen er sammenhengende. Altså hvis du kan tegne grafen med en myk bevegelse uten å løfte pennen fra papiret.



Figur 2: $f(x) = |x|$, en diskontinuerlig funksjon. Denne kan du ikke tegne med en «myk» bevegelse.

6.2 Polynomfunksjoner: Førstegradfunksjoner (lineære funksjoner)

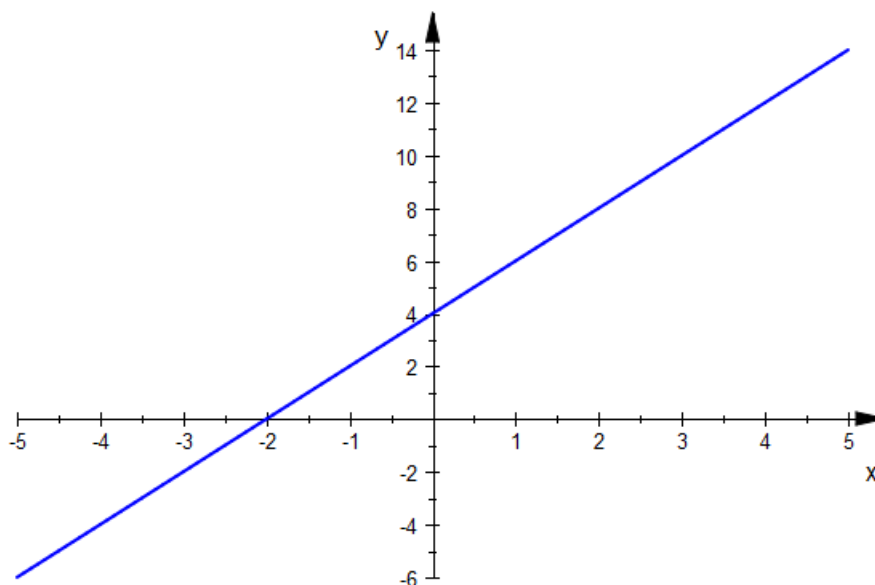
$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ er en polynomfunksjon, med polynom av n 'te grad. En førstegradfunksjon har et polynom av første grad, den ser slik ut $f(x) = a_0 + a_1x$. Vi kan også skrive den slik $f(x) = ax + b$. Formen er lik for begge to og det betyr akkurat det samme. Du kjenner kanskje igjen formen, det er standardformen for en lineær funksjon. Noen ganger skriver vi y i stedet for $f(x)$ fordi vi finner funksjonsverdien på y -aksen, $y = ax + b$. Da er $y = ax + b$ likninga for ei rett linje. Linja består av de punktene (x, y) som er slik at $y = ax + b$.

- Førstegradfunksjonen er strengt voksende når $a > 0$
- Førstegradfunksjonen er strengt avtagende når $a < 0$
- Førstegradfunksjonen er en konstant når $a = 0$

Når vi har en førstegradfunksjon er vi nysgjerrige på hva konstantleddet er, hva stigningstallet er og hvilket nullpunkt funksjonen har.

- **Konstantleddet:** Tallet b kaller vi konstantleddet. Konstantleddet forteller oss hvor grafen skjærer y -aksen, og vi finner det ved å sette $x = 0$.
- **Stigningstall:** Tallet a kaller vi stigningstallet. Det forteller oss hvor mye funksjonen vår vokser hvis x øker med en.
- **Nullpunkt:** Nullpunktet, der $f(x)$ skjærer x -aksen finner vi ved å sette $f(x) = 0$.

Eksempel 6.2.1 $f(x) = 2x + 4$. Tallet 2 kaller vi stigningstallet og tallet 4 kaller vi konstantleddet.



Figur 3: Eksempel 6.2.1: $f(x) = 2x + 4$

Funksjonen f har et nullpunkt der grafen skjærer x-aksen. Du finner nullpunktet ved å sette $f(x) = 0$. $0 = 2x + 4$ gir $2x = -4$, $x = -2$. Funksjonen f har et nullpunkt når $x = -2$.

Hvordan finne stigningstall

Formelen for å finne stigningstallet a er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eksempel 6.2.2 Punktene $(1, 2)$ og $(3, 4)$ ligger på ei rett linje. Finn stigningstallet til linja.

Løsning: Her er $(x_1, y_1) = (1, 2)$ og $(x_2, y_2) = (3, 4)$. Da får vi $a = \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$. Stigningstallet til den rette linja er 1. Da veit vi at funksjonen kan skrives som $y = x + b$

Hvordan finne konstantledd

Likninga for ei rett linje, $y = ax + b$, kan skrives om til $b = y - ax$. Det uttrykket kan vi bruke for å finne konstantleddet.

$$b = y - ax$$

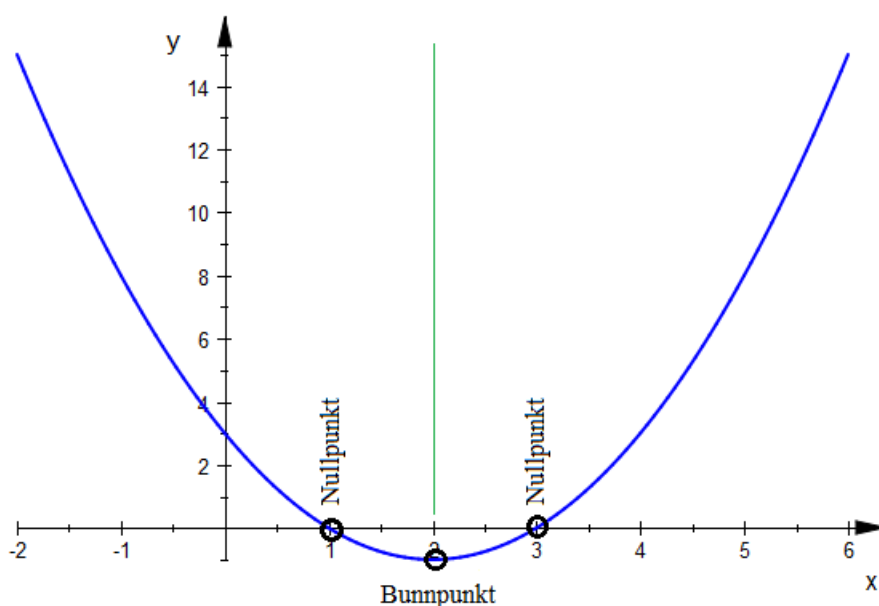
Eksempel 6.2.3 Punktene $(1, 2)$ og $(3, 4)$ har stigningstallet $a = 1$. Finn konstantleddet.

Løsning: $b = y - ax$ er det samme som $b = y_1 - ax_1$ eller $b = y_2 - ax_2$. $x_1 = 1$ og $y_1 = 2$. Vi setter det inn og får $b = y_1 - ax_1 = 2 - 1 \cdot 1 = 1$. Konstantleddet er 1. Funksjonen kan skrives som $y = x + 1$.

6.3 Polynomfunksjoner: Andregradsfunksjoner

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ er en polynomfunksjon, med polynom av n'te grad. En andregradsfunksjon har et polynom av andre grad, den ser slik ut $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Vi kan også skrive den slik $f(x) = ax^2 + bx + c$. Formen er lik for begge to og det betyr akkurat det samme. Når vi har en andregradsfunksjon er vi ofte nysgjerrige på om den har topp eller bunnpunkt, hvilket punkt er grafen symmetrisk rundt, om det eksisterer nullpunkt og hvor vi finner disse.

- **Symmetrilinje:** Grafen er symmetrisk om linjen $x = \frac{-b}{2a}$.
- **Topp eller bunnpunkt:** Dersom $a > 0$ har grafen et bunnpunkt. Dersom $a < 0$ har grafen et toppunkt. Vi finner topp eller bunnpunktet ved å sette inn x verdien til symmetrilinja i $f(x)$. Hvis vi veit at funksjonen er symmetrisk rundt to, setter vi $x = 2$ inn i $f(x)$.
- **Nullpunkt:** Nullpunktene til grafen, $f(x) = 0$, (skjæringspunkt med x-aksen) er gitt ved $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- **Faktorisering:** En andregradsfunksjon kan faktorerises hvis den har ei løsning. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (nullpunktmetoden)



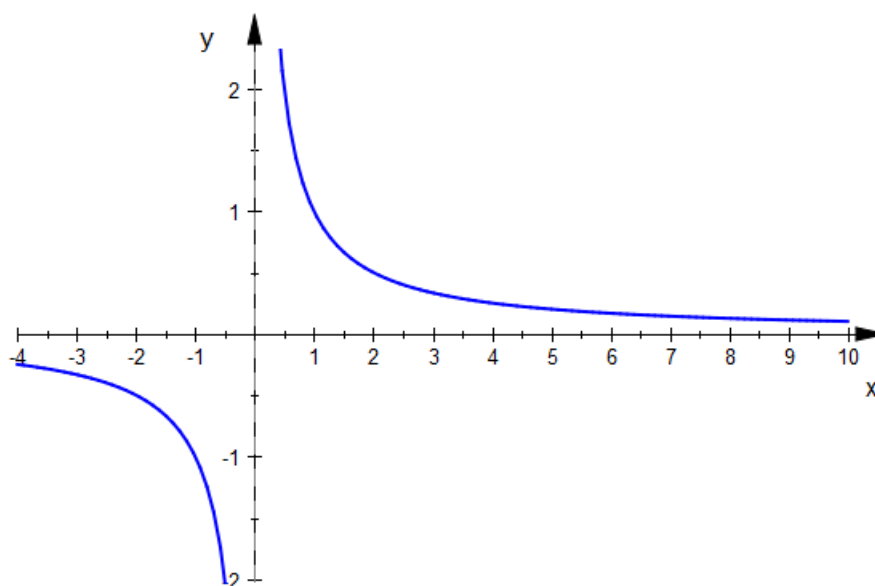
Figur 4: Eksempel 6.3.1: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Eksempel 6.3.1 De x -verdiene der $f(x) = 0$ kaller vi nullpunkter. $x = 1$ og $x = 3$ er nullpunktene til f . På grafen finner vi nullpunktene der grafen skjærer x -aksen. Vi veit at grafen har et bunnpunkt for $a = 1$ og $1 > 0$. Symmetrilinja ($x = \frac{-b}{2a}$) er $x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$, illustrert med den grønne linja i figur 4. Vi finner bunnpunktet ved å sette denne verdien

inn i $f(x)$, $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Funksjonen ovenfor har et bunnpunkt i det punktet der $x = 2$ og $y = -1$. Definisjonsmengden er $x \in \mathbb{R}$. Vi ser fra bunnpunktet at y ikke kan være lavere en -1 . Verdimengden blir derfor $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

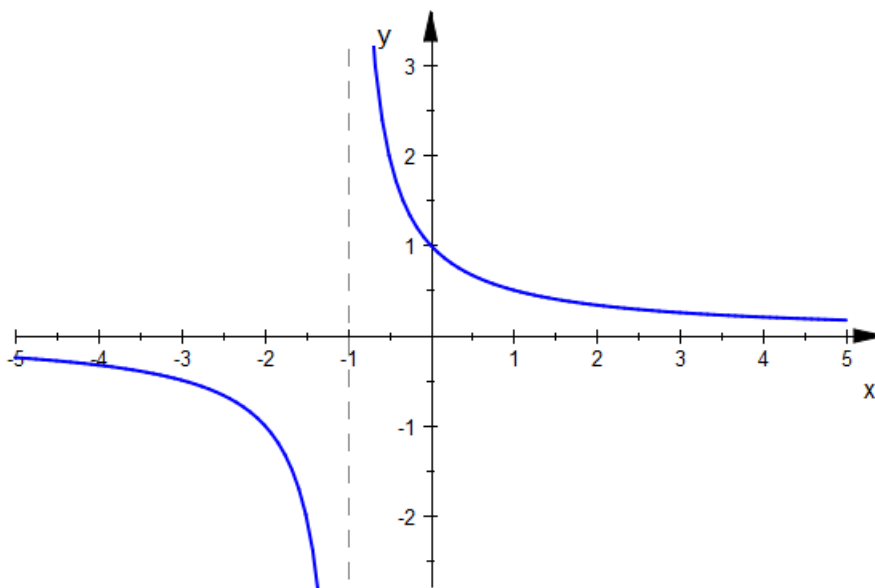
6.4 Rasjonelle funksjoner

Rasjonelle funksjoner har formen $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, gitt $g(x) \neq 0$, der f og g er polynomfunksjoner. Rasjonelle funksjoner er brøker.



Figur 5: Eksempel 6.4.1: $f(x) = 1/x$

Eksempel 6.4.1 $f(x) = \frac{1}{x}$ er en rasjonell funksjon. Denne funksjonen har ingen nullpunkter. x kan ikke være null. y eller $f(x)$ kan heller aldri bli null. Definisjonsmengden kan vi skrive som $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ eller $D_f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Du kan også forkorte det ved å skrive $D_f : x \neq 0$, de fleste vil forstå hva du mener. Verdimengden kan skrives som $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$ eller $V_f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Her kan du også forenkle det litt og skrive $D_f = y \neq 0$. Denne



Figur 6: Vertikal asymptote. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

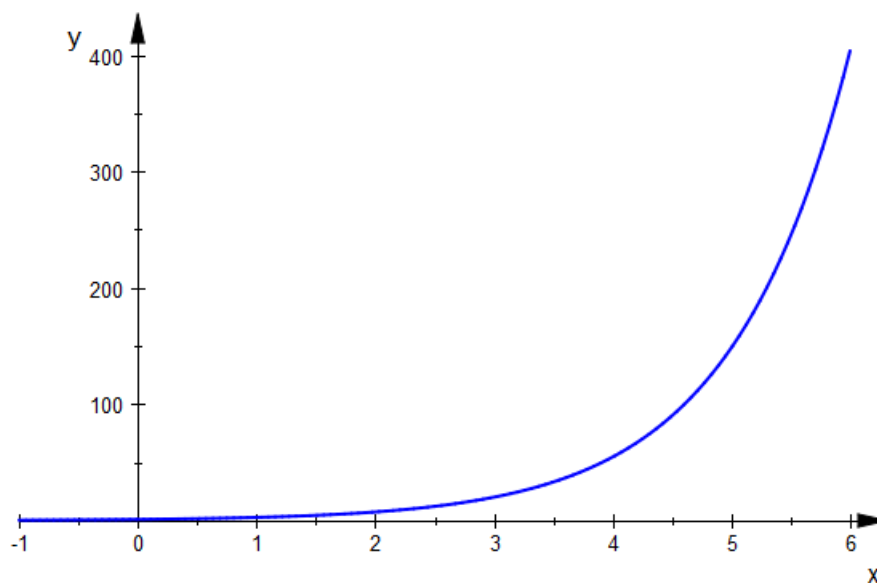
Vertikale og horisontale asymptoter Her er en liknende funksjon. x kan ikke være -1 , derfor er definisjonsmengden $D_f : x \neq -1$. y kan være alt unntatt null, og verdimengden er $V_f : y \neq 0$. Denne funksjonen er heller ikke kontinuerlig. Se på funksjonen, ser du den stiplede linja? Det er en **vertikal asymptote**. Et punkt som funksjonen nærmer seg, men aldri berører. Vi ser på grafen at når x nærmer seg -1 fra venstre side ($\rightarrow$) beveger $f(x)$ seg mot minus uendelig. Når x nærmer seg -1 fra høyre side ($\leftarrow$) beveger $f(x)$ seg mot pluss uendelig. Altså er $x = -1$ den vertikale asymptota til $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Ei **horisontal asymptote** er ei linje som $f(x)$ beveger seg mot når x går mot pluss/minus uendelig. Fra Figur 5 kan vi se at når x nærmer seg minus uendelig går y mot 0. Det samme når x nærmer seg pluss uendelig, y nærmer seg 0. Det vil si at $y = 0$ er en horisontal asymptote.

Et meget nyttig verktøy når du skal forsøke å finne asymptoter, verdi- og definisjonsmengde er å tegne funksjonen ved hjelp av en kalkulator. Du kan også, som her, finne ut hva slags verdier x og y ikke kan ha ved å tenke over hva vi har lov til å putte inn i funksjonen. Når du veit at vi ikke får lov til å dele på null, veit du også at x ikke kan være -1 .

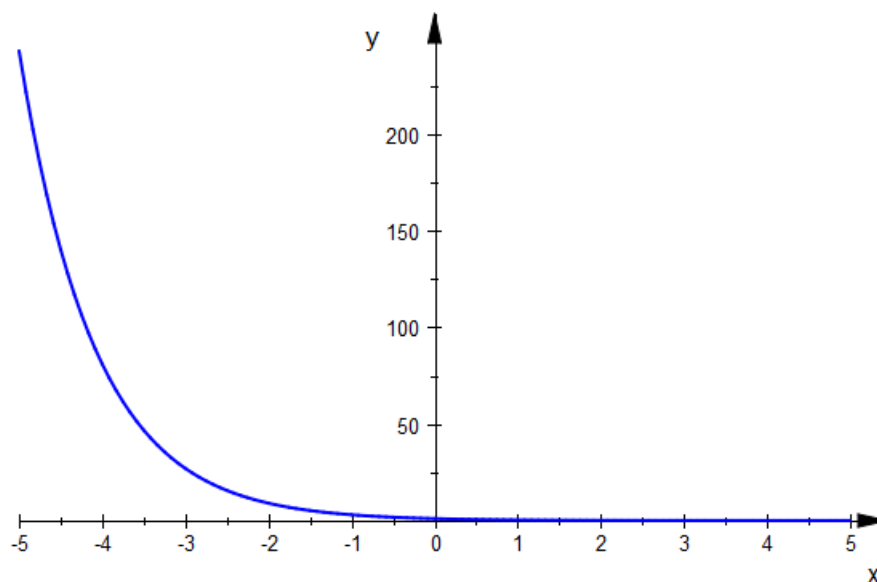
6.5 Eksponential funksjoner

Eksponential funksjoner har formen $y = a^x$ der $a > 0$.



Figur 7: Eksempel 6.5.1: $f(x) = e^x$

Eksempel 6.5.1 e kalles Eulers konstant. Definisjonsmengden til f er $D_f : (-\infty, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$, x kan være alle reelle tall. Det er ingen begrensinger på hva x kan og kan ikke være. $f(x)$ kan aldri bli null, $f(x) \neq 0$, men den nærmer seg når x blir veldig veldig stor og negativ. Verdimengden er derfor $V_f : (0, \infty)$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Du legger kanskje også merke til at funksjonen vokser?



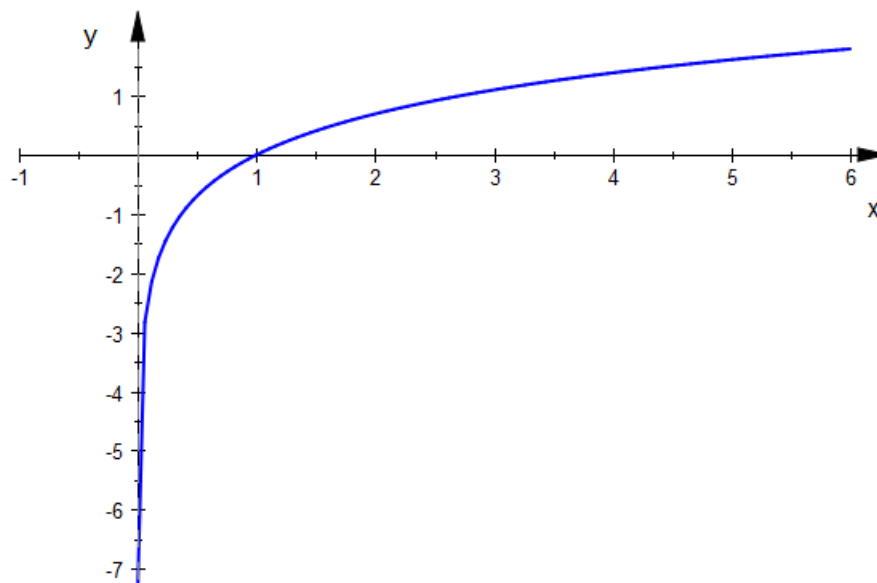
Figur 8: Eksempel 6.5.1: $f(x) = 3^{-x}$

Eksempel 6.5.2 Hvis vi setter minus foran x faller funksjonen mot null. Definisjonsmengden til f er $D_f : (-\infty, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$, x kan være alle reelle tall. Det er

ingen begrensninger på hva x kan og kan ikke være. $f(x)$ kan aldri bli null, $f(x) \neq 0$, men den nærmer seg når x blir veldig veldig stor. Verdimengden er derfor $V_f : (0, \infty)$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. Denne funksjonen faller.

6.6 Logaritmefunksjoner

Logaritmefunksjoner har formen $y = \log_a(x)$ der $x > 0$ og $a > 0$. a kaller vi for grunntallet til logaritmen. Et eksempel på en logaritme funksjon er den naturlige logaritmen $y = \ln(x)$. Den naturlige logaritmen har e som grunntall.

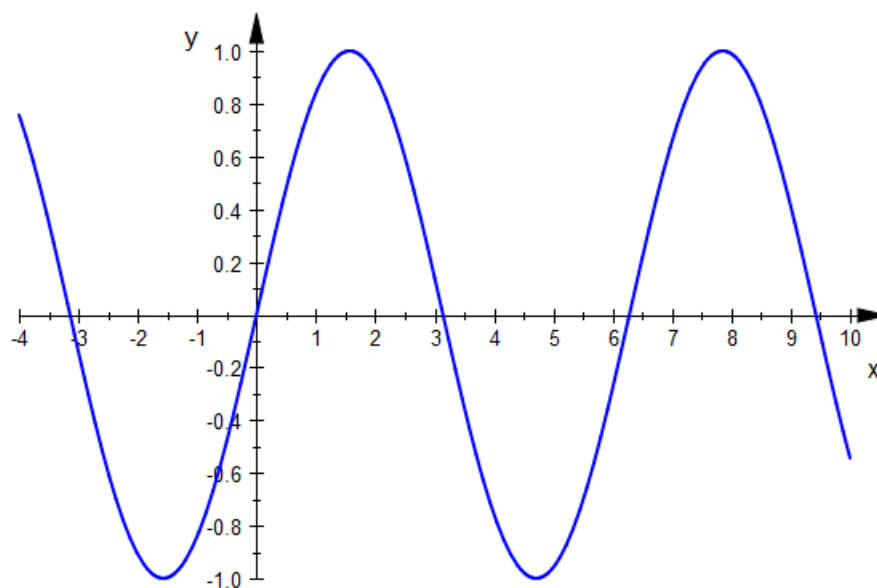


Figur 9: Eksempel 6.6.1: $f(x) = \ln(x)$

Eksempel 6.6.1 Funksjonen f har et nullpunkt når $x = 1$ fordi $f(1) = \ln(1) = 0$. Det er kun mulig å ta den naturlige logaritmen av positive tall, definisjonsmengden er derfor gitt ved $D_f : (0, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. x kan ligge veldig nær null, men kan aldri være null eller lavere. Verdimengden er gitt ved $V_f : (-\infty, \infty)$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R}\}$.

6.7 Trigonometriske funksjoner

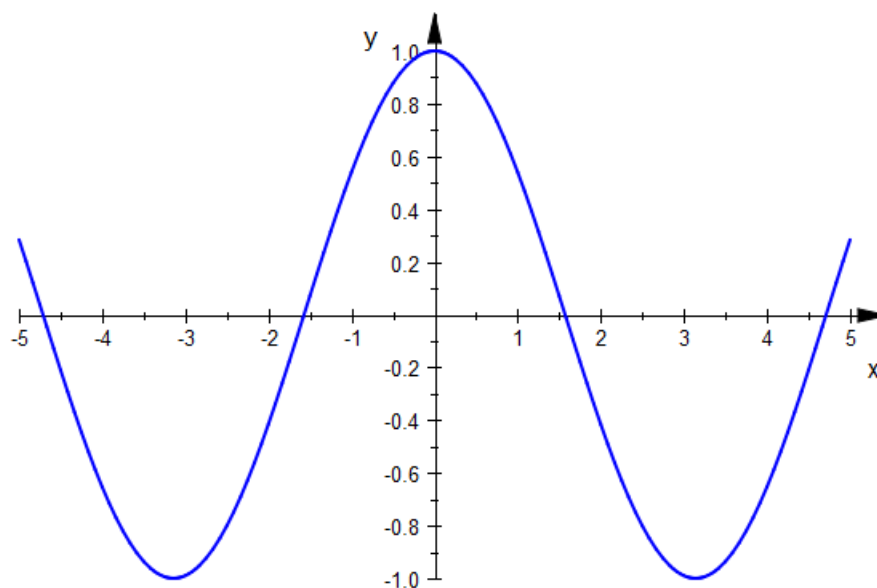
Trigonometriske funksjoner kan være for eksempel $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ eller $f(x) = \tan(x)$. Trigonometriske funksjoner er sykliske, det betyr at de gjentar seg selv med jevne mellomrom.



Figur 10: Eksempel 6.7.1: $f(x) = \sin(x)$

Eksempel 6.7.1 Funksjonen $f(x) = \sin(x)$ på intervallet -3 til 6 to bunnpunkter og to toppunkter. Funksjonen har også to nullpunkter. Hvor mange toppunkter, bunnpunkter eller nullpunkter den har er avhengig av intervallet du velger å vurdere den på. Definisjonsmengden, hvilke verdier x kan være, er gitt ved $D_f : (-\infty, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$. Definisjonsmengden inkluderer alle reelle tall, altså kan x være hva som helst. Verdimengden, hvilke verdier y kan anta, er gitt ved $V_f : [-1, 1]$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Altså kan y være minimum -1 og maksimum 1 . Funksjonen f beveger seg mellom -1 og 1 .

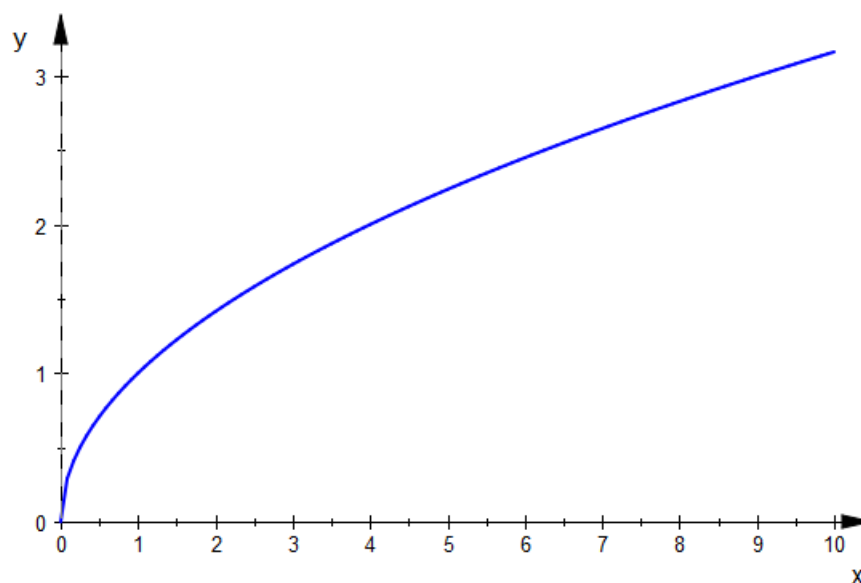
- **Nullpunkter:** For å finne nullpunkter setter vi $f(x) = 0$, i det tilfellet her blir det $\sin(x) = 0$. $\sin(x) = 0$ når $x = n\pi$, og n er et helt tall. For eksempel vil noen nullpunkter være der $x = 0 \cdot \pi$, $x = -1 \cdot \pi$ eller $x = 2 \cdot \pi$



Figur 11: Eksempel 6.7.2: $f(x) = \cos(x)$

Eksempel 6.7.2 Funksjonen $f(x) = \cos(x)$ har nullpunkter når $x = \pi n - \frac{\pi}{2}$, der n er et helt tall. Definisjonsmengden, hvilke verdier x kan være, er gitt ved $D_f : (-\infty, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$. Definisjonsmengden inkluderer alle reelle tall, altså kan x være hva som helst. Verdimengden, hvilke verdier y kan anta, er gitt ved $V_f : [-1, 1]$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$. Altså kan y være minimum -1 og maksimum 1. Funksjonen f beveger seg mellom -1 og 1.

6.8 Et nyttig eksempel: Kvadratroten



Figur 12: $f(x) = \sqrt{x}$

f har et nullpunkt når $x = 0$, $f(0) = \sqrt{0} = 0$. Hvis du forsøker å ta kvadratroten av et negativt tall vil du få et imaginært tall, x må derfor være et ikke-negativt tall. Det kan vi skrive som $x \geq 0$ eller $D_f := [0, \infty)$ eller $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Verdimengden er gitt som $V_f = [0, \infty)$ eller $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

Oppgavesett 6

Oppgave 6.1 Tegn grafen f . Finn nullpunkt, stigningstall og konstantledd:

1. $f(x) = 3x - 6$
2. $f(x) = -2x + 3$

Oppgave 6.2 Finn stigningstall, konstantledd og skriv opp funksjonsuttrykket:

1. $(0, 3)$ og $(2, 5)$
2. $(1, 7)$ og $(4, 22)$
3. $(1, 1)$ og $(-2, 7)$
4. $(1, 6)$ og $(3, 14)$
5. $(1, 2)$ og $(4, 11)$

Oppgave 6.3

1. Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x-2}$ bestem $f(2)$, $f(6)$ og $f(a+2)$
2. Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ bestem $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ og $f(\sqrt{a-1})$
3. Gitt funksjonen $f(x) = \frac{-2x+5}{4}$ bestem $f(\frac{3}{2})$ og $f(2)$.

Oppgave 6.4

1. Tegn grafen $f(x) = x^2 - 2x - 3$ på intervallet -2 og 4 . Finn nullpunkt og bunnpunkt.
2. Har funksjonen $f(x) = 1 + 2x - x^2$ et topp eller bunnpunkt? Forklar. Hvilket punkt er grafen symmetrisk rundt? (Finn symmetrilinja)
3. Har funksjonen $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et topp eller bunnpunkt? Forklar. Hvilken x -verdi er grafen symmetrisk rundt? (Finn symmetrilinja)

Oppgave 6.5 Stine er 16 år og hopper høyde. Hun har hoppa 160 cm og regner med å øke høyden med 4 cm pr. år i åra som kommer.

1. Lag en matematisk modell som viser hvor høyt Stine hopper om x år. Tegn grafen. Hva er konstantledd og stigningstall?
2. Hvor høy hopper Stine om 5 år etter denne modellen?
3. Når hopper hun 200 cm etter denne modellen?

Oppgave 6.6 Skriv opp funksjonsuttrykket for en funksjon som:

1. viser hva du må betale for x liter melk når en liter koster 11 kroner.
2. viser strekninga du har kjørt etter t timer når du kjører i 80 km/t.

Oppgave 6.7

1. Lars plukker blåbær. Han har allerede plukket 4 kg. Lars plukker 1 kg blåbær i timen. Skriv opp en funksjon som beskriver hvor mange kilo blåbær Lars har om x timer. Hvor mange kilo blåbær har Lars om seks timer?
2. Reidar sparer penger. Han får 1500 kroner av ei gammel tante, i tillegg planlegger Reidar å spare 500 kroner i måneden. Skriv opp en funksjon som beskriver hvor mye penger Reidar har spart etter x måneder.
3. Reidar sparer penger for å kjøpe seg ny sykkel. Sykkelen han ønsker seg koster 17000 kroner. Hvor lenge må Reidar spare før han får kjøpt sykkelen?
4. Hvis Reidar sparer 1000 kroner i måneden i stedet for 500 kroner, hvor lenge må Reidar spare nå før han får kjøpt sykkelen?

Oppgave 6.8 Finn definisjonsmengde og verdimengde. Hvis du synes det er vanskelig hjelper det ofte å tegne en graf av funksjonen.

1. $f(x) = \frac{1}{-3x}$
2. $f(x) = \ln(2-x)$
3. $f(x) = \sqrt{-2x}$
4. $f(x) = e^{2x}$
5. $f(x) = \cos(x)$
6. $f(x) = \frac{1}{3+x}$
7. $f(x) = \sqrt{3x}$

Fasit: Oppgavesett 6

Oppgave 6.1

1. Stigningstall $a = 3$, konstantledd $b = -6$. Nullpunkt $x = 2$
2. Stigningstall $a = -2$, konstantledd $b = 3$. Nullpunkt $x = \frac{3}{2}$

Oppgave 6.2

1. $y = x + 3$
2. $y = 5x + 2$
3. $y = -3x + 4$
4. $y = 4x + 2$
5. $y = 3x - 1$

Oppgave 6.3

1. $f(2) = \sqrt{2-2} = 0$, $f(6) = 2$ og $f(a+2) = \sqrt{a}$
2. $f(0) = 1$, $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{3}) = 2$ og $f(\sqrt{a-1}) = \sqrt{a}$
3. $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$ og $f(2) = \frac{1}{4}$.

Oppgave 6.4

1. Nullpunkt: $x_1 = -1$ og $x_2 = 3$. Bunnpunkt: $x = 1$
2. Grafen har toppunkt. Symmetrilinja $x = 1$.
3. Grafen har bunnpunkt. Symmetrilinja $x = 1$.

Oppgave 6.5

1. $y = 4x + 160$
2. 180 cm
3. 10 år

Oppgave 6.6

1. $y = 11x$
2. $y = 80t$

Oppgave 6.7

1. $f(6) = 10$
2. $f(x) = 1500 + 500x$
3. 31 måneder.
4. 15,5 måneder.

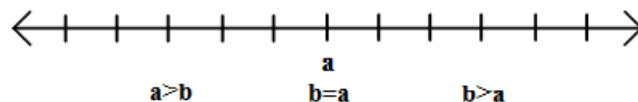
Oppgave 6.8 For fler skrivemåter se løsningsforslag.

1. $D_f : x \neq 0$ og $V_f : y \neq 0$
2. $D_f : -\infty < x < 2$ og $V_f : -\infty < x < \infty$
3. $D_f : x \leq 0$ og $V_f : y \geq 0$
4. $D_f : -\infty < x < \infty$ og $V_f : y > 0$
5. $D_f : -\infty < x < \infty$ og $V_f : -1 \leq y \leq 1$
6. $D_f : x \neq -3$ og $V_f : y \neq 0$
7. $D_f : x \geq 0$ og $V_f : y \geq 0$

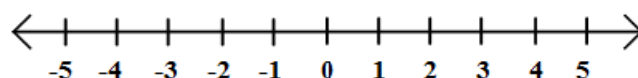
7 Ulikheter

$a > b$ «a er større enn b»

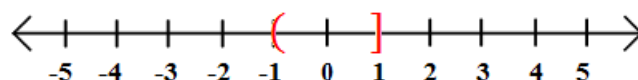
$a \geq b$ «a er større enn eller lik b»



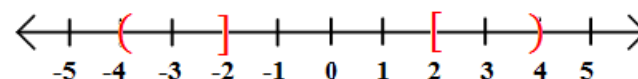
Vi kan illustrere størrelser ved hjelp av tallinja. Tall til høyre for a er større enn a, tall til venstre for a er mindre enn a. Ei vanlig tallinje fra for eksempel -5 til 5 ser slik ut:



Vi kan markere mengder på tallinja. For eksempel kan mengden $(-1, 1]$, fra -1 til og med 1, markeres slik



Eller $(-4, -2] \cup [2, 4)$, alle tall fra -4 til og med -2 og alle tall fra og med 2 til 4, markeres slik



7.1 Regneregler

1. Hvis $a > b$ og $b > c$, da er $a > c$.
2. Addisjon og subtraksjon: Hvis $a > b$, da er $a + c > b + c$ og $a - c > b - c$
3. Multiplikasjon og divisjon med positive tall: Hvis $a > b$ og $c > 0$, da er $a \cdot c > b \cdot c$ og $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
4. Multiplikasjon og divisjon med negative tall: Når vi multipliserer eller dividerer med negative tall må vi snu om på ulikhetstegnet. Hvis $a > b$ og $c < 0$, da er $a \cdot c < b \cdot c$ og $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Disse reglene gjelder også for ulikhetene $\leq$ og $\geq$.

7.2 Førstegradulikheter

Bortsett fra at du må passe på å endre ulikhetstegnet hvis du multipliserer eller dividerer med et negativt tall er det å løse førstegradulikheter likt det å løse førstegradslikninger.

Eksempel 7.2.1 Løs $6x + 5 > 4x - 3$.

Løsning:

$2x + 5 > -3$ Trekk fra $4x$ på begge sider av ulikhetstegnet for å samle alle leddene med x på venstre side.

$2x > -8$ Trekk fra 5 på begge sider av ulikhetstegnet for å få x aleine.

$\frac{2x}{2} > \frac{-8}{2}$ Divider begge sider med 2.

$x > -4$

Eksempel 7.2.2 Løs $x - 3 \leq 5x + 2$

Løsning:

$-3 \leq 4x + 2$ Trekk fra x på begge sider av ulikhetstegnet for å samle alle leddene med x på en side.

$-5 \leq 4x$ Trekk fra 2 på begge sider av ulikhetstegnet for å få x aleine.

$-\frac{5}{4} \leq x$ Divider begge sider med 4.

7.3 Andregradsulikheter

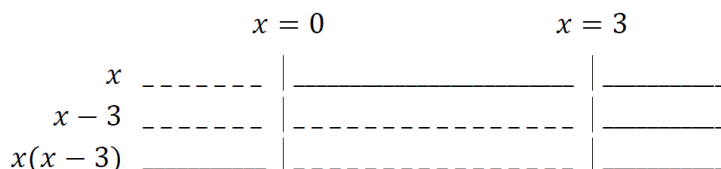
Med andregradsulikheter er det litt mer komplisert enn førstegradulikheter, fordi vi ikke kan løse dem direkte. Slike ulikheter løses ved å samle alle ledd på venstre side slik at det står bare 0 på den høyre siden av ulikhetstegnet. Etterpå må man faktorisere venstre side og undersøke de forskjellige mulighetene, enten ved regning eller med fortegnsskjema. Da kan man benytte følgende regler:

1. Produkt/kvotient av tall med samme fortegn er positivt: $ab > 0$ og $\frac{a}{b} > 0$ hvis $a > 0$ og $b > 0$ eller hvis $a < 0$ og $b < 0$.
2. Produkt/kvotient av tall med forskjellig fortegn er negativt: $ab < 0$ og $\frac{a}{b} < 0$ hvis $a > 0$ og $b < 0$ eller hvis $a < 0$ og $b > 0$.

Begge disse reglene er et resultat av at minus og minus blir pluss, mens minus og pluss blir minus. Hvis det er umulig å faktorisere et andregradsuttrykk er det enten alltid positivt eller alltid negativt. I slike tilfeller vil fortegnet til koeffisienten foran x^2 avgjøre om uttrykket er positivt for alle x eller negativt for alle x .

Eksempel 7.3.1 Løs $x(x-3) > 0$

Løsning: Vi faktorerer uttrykket, $x \cdot (x-3) > 0$. Det består av to deler x og $(x-3)$. Dermed er $x(x-3)$ positivt hvis både $x > 0$ og $(x-3) > 0$ (se regel 1 for andregradsulikheter). Det skjer hvis $x > 0$ og $x > 3$, altså er ei løsning at $x > 3$. Uttrykket er også positivt hvis både $x < 0$ og $(x-3) < 0$. Det skjer hvis $x < 0$ og $x < 3$, altså er den andre løsningen at $x < 0$. Dette kan også skisseres med et fortegnsskjema. Ofte når du tegner fortegnsskjema er det nyttig å finne ut hvor uttrykket går fra positivt til negativt eller omvendt. Det gjør du ved å finne nullpunktene. Her er $f(x) = 0$ når enten $x = 0$ eller $x = 3$.

Figur 13: $x(x-3)$

Stiplede streker betyr at uttrykket er negativt, og hele streker betyr at uttrykket er positivt. Her kan vi se at $x(x-3)$ er positivt for $x < 0$ og $x > 3$.

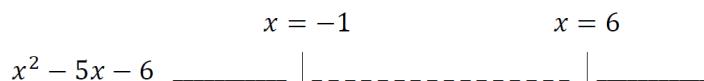
Eksempel 7.3.2 Løs $x^2 - 5x - 6 < 0$

Løsning: Først faktorerer vi venstre side ved hjelp av ABC-formelen. $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2}$. Det vil si at $x_1 = 6$ og $x_2 = -1$. $x^2 - 5x - 6$ kan faktorerer til $(x-6)(x+1) < 0$. For at $(x-6)(x+1) < 0$ må enten 1) $(x-6) > 0$ og $(x+1) < 0$ eller 2) $(x-6) < 0$ og $(x+1) > 0$.

Alternativ 1: $(x-6) > 0$ gir $x > 6$ og $(x+1) < 0$ gir $x < -1$. x kan ikke være både større enn seks og mindre enn minus 1, så vi går videre til alternativ to.

Alternativ 2: $(x-6) < 0$ gir $x < 6$ og $(x+1) > 0$ gir $x > -1$. $x^2 - 5x - 6 < 0$ for $-1 < x < 6$

Det eneste stedene der $x^2 - 5x - 6$ kan skifte fortegn er når $x^2 - 5x - 6 = 0$. Dette skjer når $x_1 = 6$ og $x_2 = -1$. Vi kan lage et fortegnsskjema:

Figur 14: $x^2 - 5x - 6$

Her ser vi at $x^2 - 5x - 6 < 0$ for $-1 < x < 6$.

Eksempel 7.3.3 Løs ulikheten $\frac{3x+5}{x-4} \leq 0$.

Løsning: Løs den i to steg. Først løser vi $\frac{3x+5}{x-4} = 0$, deretter løser vi $\frac{3x+5}{x-4} < 0$.

1. $\frac{3x+5}{x-4} = 0$ hvis $3x+5 = 0$. $3x+5 = 0$ når $x = -\frac{5}{3}$

2. $\frac{3x+5}{x-4} < 0$ hvis 1) $(3x+5) > 0$ og $(x-4) < 0$ eller 2) $(3x+5) < 0$ og $(x-4) > 0$.

(a) *Alternativ 1:* $(3x + 5) > 0$ gir $x > -\frac{5}{3}$ og $(x - 4) < 0$ gir $x < 4$. Altså må x være større enn $-\frac{5}{3}$ og mindre enn fire, $-\frac{5}{3} < x < 4$.

(b) *Alternativ 2:* $(3x + 5) < 0$ gir $x < -\frac{5}{3}$ og $(x - 4) > 0$ gir $x > 4$. x kan ikke samtidig være større enn fire og mindre enn $-\frac{5}{3}$.

Svaret er $-\frac{5}{3} \leq x < 4$.

Eksempel 7.3.4 Løs ulikheten $(x + 5)(x - 3) < 0$.

Løsning: $(x + 5)(x - 3) < 0$ hvis enten 1) $(x + 5) > 0$ og $(x - 3) < 0$ eller 2) $(x + 5) < 0$ og $(x - 3) > 0$.

Alternativ 1: $(x + 5) > 0$ hvis $x > -5$ og $(x - 3) < 0$ hvis $x < 3$, slik at $-5 < x < 3$.

Alternativ 2: $(x + 5) < 0$ hvis $x < -5$ og $(x - 3) > 0$ hvis $x > 3$. Det gir ingen løsning, x kan ikke samtidig være mindre enn -5 og større en 3. Vi kan også illustrere problemet ved hjelp av et fortegnsskjema. Start med å finne nullpunktene til $(x + 5)(x - 3)$.

		$x = -5$		$x = 3$	
$x + 5$	-----		-----		-----
$x - 3$	-----		-----		-----
$(x + 5)(x - 3)$	-----		-----		-----

Figur 15: $(x + 5)(x - 3)$

Oppgavesett 7

Oppgave 7.1: Tallinja Marker følgende mengder på ei tallinje.

1. $x > 2$
2. $x \leq 3$
3. $1 < x < 4$
4. $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$
5. $x \in (-\infty, 2)$
6. $x \in [2, 4]$
7. $x \in (-3, 5]$
8. $x \in [-3, 1) \cup (1, 3)$

Oppgave 7.2 Løs førstegradulikhetene:

1. $3 - 2x > 7$
2. $x + 2 > 2x + 3$
3. $8 - 3x > 7 - 2x$
4. $3y - 8 \geq 4 + 2(y - 3)$
5. $2(s - 1) - 3(1 - s) < s + 3$
6. $t + 3 - 2(3 + 2t) < 5(2 - t)$
7. $5x + 2 < 3x - 1$
8. $-\frac{6x}{4} - 2 < x - 3$
9. $-\frac{3x}{2} - 1 > x + 2$
10. $2x + 1 > 5x - 5$
11. $2x - \frac{x-1}{3} > x$

Oppgave 7.3 Løs andregradsulikhetene:

1. $(x - 2)(x - 4) < 0$
2. $(2x - 3)(x + 3) > 0$
3. $3x^2 + 13x + 4 > 0$
4. $4x - x^2 > 0$

Oppgave 7.4 Løs ulikhetene:

1. $\frac{x-3}{x+1} > 0$

2. $\frac{2}{x+3} > 0$

3. $\frac{-2x+4}{x+1} < 0$

4. $\frac{4+x}{3-2x} \geq 0$

Oppgave 7.5 Løs ulikhetene:

1. $\frac{x}{2} < \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + x$

2. $\frac{x+4}{3} > \frac{2x+1}{3} + 1$

3. $\frac{8-6x}{1-x} > x + 2$ (lang)

Fasit: Oppgavesett 7

Oppgave 7.1: Tallinja Se løsningsforslag

Oppgave 7.2

1. $x < -2$
2. $-1 > x$
3. $1 > x$
4. $y \geq 6$
5. $s < 2$
6. $t < \frac{13}{2}$
7. $x < -\frac{3}{2}$
8. $x > \frac{2}{5}$
9. $-\frac{6}{5} > x$
10. $2 > x$
11. $x > -\frac{1}{2}$

Oppgave 7.3

1. $x \in (2, 4)$, x ligger mellom to og fire.
2. $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, x kan være mindre enn -3 og større enn $\frac{3}{2}$.
3. $x \in (-\infty, -4) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$, x kan være mindre enn -4 og større enn $-\frac{1}{3}$.
4. $x \in (0, 4)$, x må ligge mellom null og fire.

Oppgave 7.4

1. $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, x kan være mindre enn minus en eller større enn tre.
2. $x > -3$
3. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, x kan være mindre enn minus en eller større enn to.
4. $x \in [-4, \frac{3}{2})$

Oppgave 7.5

1. $\frac{4}{15} < x$
2. $0 > x$
3. $x \in (2, 3) \cup (-\infty, 1)$, x er mellom 2 og 3 eller mindre enn en.

8 Summetegn (ekstra, undervises ikke høst 2017)

Summetegnet kan hjelpe oss å skrive ei rekke som følger en bestemt regel som en sum. $\sum_{i=1}^n a_i$ betyr summen av alle elementer fra $i = 1$ til n og kan skrives slik:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

Eksempel 8.1

$$\sum_{i=1}^3 i = 1 + 2 + 3$$

$$\sum_{i=1}^5 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$$

$$\sum_{i=1}^5 2^{i-2} = 2^{1-2} + 2^{2-2} + 2^{3-2} + 2^{4-2} + 2^{5-2}$$

$$\sum_{i=1}^5 (i-1)^i = (1-1)^1 + (2-1)^2 + (3-1)^3 + (4-1)^4 + (5-1)^5$$

$$(\sum_{i=1}^5 x_i)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$$

$$\sum_{i=3}^5 \frac{i}{i+1} = \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6}$$

Regler

k er en konstant.

$$\sum_{i=1}^n k = nk \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n ki = k \sum_{i=1}^n i \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n (i+k) = nk + \sum_{i=1}^n i \quad (7)$$

Eksempel 8.2 Formelen for gjennomsnittsverdien er $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ der n er det totale antall observasjoner. Anne måler høyden til sine fem nærmeste venner, dette gir observasjonene $x_1 = 172$, $x_2 = 164$, $x_3 = 184$, $x_4 = 152$ og $x_5 = 176$. Hva er gjennomsnittshøyden til Annes venner?

Løsning: Her er $n = 5$. Det gir $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5}(172 + 164 + 184 + 152 + 176) = \frac{848}{5} = 169,6$

Oppgavesett 8

Oppgave 8.1 Skriv ut summen og regn den ut:

1. $\sum_{i=1}^3 2i$
2. $\sum_{i=0}^3 i + 1$
3. $\sum_{i=1}^4 i^2$
4. $\sum_{i=1}^4 \frac{i}{2}$
5. $\sum_{i=2}^4 (i + 1)$
6. $\sum_{i=0}^2 (i^2)$
7. $\sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+2}$
8. $\sum_{i=2}^4 (i^2 + i)$
9. $\sum_{i=2}^3 (i + 2)^2$
10. $(\sum_{i=2}^3 i + 2)^2$
11. $\left(\sum_{i=1}^3 i\right)^2$
12. $\sum_{i=2}^4 (i - 2)$
13. $3\sum_{i=1}^4 i$
14. $\sum_{i=1}^5 x_i$, der $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ og $x_5 = 10$
15. Regn ut gjennomsnittet til observasjonene $x_1 = 53$, $x_2 = 42$, $x_3 = 38$, $x_4 = 61$ og $x_5 = 65$.

Oppgave 8.2 Skriv rekken som en sum:

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}$
3. $-1 + 0 + 1 + 2 + 3$
4. $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}$
5. $3(2)^4 + 3(2)^5 + 3(2)^6 + \dots + 3(6)^{10}$
6. $1 + 4 + 9 + 16$
7. $3 + 5 + 7 + 9$ (litt vanskelig)

Fasit: Oppgavesett 8

Oppgave 8.1

1. 12
2. 10
3. 30
4. 5
5. 12
6. 5
7. $\frac{43}{30}$
8. 38
9. 41
10. 81
11. 36
12. 3
13. 30
14. 22
15. 51.8

Oppgave 8.2

1. $\sum_{i=1}^8 i$
2. $\sum_{i=2}^7 \frac{1}{i}$
3. $\sum_{i=1}^5 i - 2$
4. $\sum_{i=0}^{63} 2^i$
5. $3 \sum_{i=1}^7 (2)^{i+3}$
6. $\sum_{i=1}^4 i^2$
7. $\sum_{i=1}^4 2i + 1$

Notasjonshjelpe

+	addisjon
−	subtraksjon
/	divisjon
·	multiplikasjon
±	addisjon eller subtraksjon
∞	uendelig
=	likhetstegn
$\simeq$ eller $\approx$	tilnærma lik
$a < b$	a er mindre enn b .
$a \leq b$	a er mindre eller er lik b
$ a $	absoluttverdien til a . Absoluttverdien kan tolkes som avstanden fra 0 til x på tallinjen. F.eks $ a = 6$ betyr at $a = \pm 6$.
$x \in A$	x er et element i mengden A (x tilhører A)
$x \in \mathbb{R}$	Alle reelle tall. Reelle tall er alle mulige punkter på en uendelig lang tallinje. F.eks er både 0.000079 og 10 milliarder begge reelle tall.
$\{\}$	Et sett med elementer/tall
$A \cup B$	union mellom A og B . Et sett $\{A \cup B\}$ inneholder både A og B
(a, b)	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$. Alle reelle tall fra a til b . Åpent intervall som ikke inkluderer endepunktene a og b
$[a, b)$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$. Alle reelle tall fra og med a til b . Inneholder a men ikke b .
$[a, b]$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$. Alle reelle tall fra og med a til og med b . Lukket intervall som inkluderer endepunktene a og b
$(0, \infty)$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ Alle reelle positive tall
$[0, \infty)$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ Alle reelle ikke-negative tall
$(-\infty, 0)$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ Alle reelle negative tall
$(-\infty, 0]$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ Alle reelle ikke-positive tall
$(-\infty, b) \cup (b, \infty)$	er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq b\}$ Alle reelle tall utenom b

$(a,b) \cup (b,c)$ er mengden $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < c \mid x \neq b\}$ Alle reelle tall mellom a og c utenom b

Σ summetegn. For eksempel $\sum_{i=1}^n$ betyr summér alle elementer fra $i = 1$ til n

Π produkt. For eksempel $\prod_{i=1}^n$ betyr multipliser alle elementer fra $i = 1$ til n

Løsningsforslag

Oppgavesett 1: Prosentregning

Oppgave 1.1, se fasit

Oppgave 1.2 Bruk regneregel (1).

1. $0.5 \cdot 500000 = 250000$
2. $0.75 \cdot 125450 = 94087.5$
3. $0.01 \cdot 67500 = 675$
4. $2.5 \cdot 155.55 = 388.875$

Oppgave 1.3

1. Bruk regneregel (2). Grunnverdien er antall elever totalt, og de fire sjuke elevene er andel av grunnverdi. $\frac{4}{25} = 0.16$. 16% av elevene var sjuke i går.
2. Bruk regneregel (2). $0.2 \cdot 25 = 5$. Fem elever liker norsk best.
3. Prosentvis endring. Regnestykket blir $\frac{28-25}{25} = 0.12$. Antall elever økte med 12% fra forrige skoleår.

Oppgave 1.4

1. Dette kan du gjøre på to måter. 1) Du kan regne ut hvor mye Lise betaler i skatt, og deretter trekke dette fra bruttoinntekt. Bruk regneregel nummer (1). Grunnverdien er Lises bruttoinntekt. Hvor mye betaler Lise i skatt? $0.28 \cdot 40000 = 11200$. Lises nettoinntekt er $40000 - 11200 = 28800$. 2) Det Lise betaler i skatt utgjør 28% av hennes bruttoinntekt. Derfor utgjør nettoinntekten til Lise 72%. ($100\% - 28\% = 72\%$) Bruk regneregel (1) for å finne Lises nettoinntekt. $40000 \cdot 0.72 = 28800$
2. Lises nettoinntekt er 28 800 kroner. Bruk regneregel (2) for å finne ut hvor mange prosent husleia utgjør. Regnestykket blir $\frac{7200}{28800} = 0.25$. Husleia utgjør 25%.

Oppgave 1.5

1. For tips se eksempel 1.1.4. Her må du bruke regneregel (3). Grunnverdien vi leiter etter er pris på kassa ekskl. moms. Andel av grunnverdi er prisen på kassa inkl. moms. Kassas pris inkl. moms utgjør 125% av grunnverdien. (Når vi regner moms legger vi alltid til 25% på prisen. Altså hvis prisen er 100 kroner ekskl. moms, vil prisen inkl. moms bli 125 kroner) Regnestykket blir $5000 \cdot 1.25 = 4000$. Kassa koster 4000 kroner ekskl. moms.
2. Bruk regneregel (2). Regnestykket blir $\frac{50}{500} = 0.1$. 10% av eplene er skada.

3. Du var villig til å betale 4000 kroner ekskl. moms for 500 epler. Siden 10% av eplene er skada ønsker du ikke å betale for dem, men du vil betale for de eplene som ikke er skadd. 90% av 4000 kroner er $\frac{90}{100} \cdot 4000 = 3600$. Du er villig til å betale 3600 kroner ekskl. moms for kassa.
4. Her må du øke prisen ekskl. moms, 3600 kroner, med 25%. Prisen inkl. moms utgjør 125%. Her kan vi bruke regneregul (1). Regnestykket blir $1.25 \cdot 3600 = 4500$. Du er villig til å betale 4500 kroner inkl. moms for kassa.

Oppgave 1.6

1. Gunnleif må betale 30% av buksenes opprinnelig pris. $0.3 \cdot 1000 = 300$. Gunnleif betaler 300 kroner for buksene.
2. Her kan du bruke regneregul (3). Regnestykket blir da $\frac{200}{0.5} = 400$. Skjorta kosta opprinnelig 400 kroner.
3. Før rabatt koster klærne til Gunnleif $400 + 1000 = 1400$, 1400 kroner. Gunnleif betaler bare 500 kroner og har fått en total rabatt på 900 kroner. Bruk regneregul (2). Regnestykket blir $\frac{900}{1400} \approx 0.643$. Gunnleif har fått 64.3% rabatt på januarsalget.

Oppgave 1.7

1. Se regel for prosentvis endring. $\frac{1600-1500}{1500} = 0.0667$. Gjeddepopulasjonen har økt med 6.67%.
2. Bruk samme metode som ovenfor. $\frac{1450-1600}{1450} = -0.0938$. Gjeddepopulasjonen har sunket med 9.38%.

Oppgave 1.8

1. $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60$. Det er seksti elever i klassen
2. Prosentvis endring. $\frac{425000-400000}{400000} = 0.0625$. Lønna har steget med 6.25%.
3. 67 kroner er andel av grunnverdi og prisen eksklusive moms er grunnverdi. Du kan bruke formel (3). $67 \cdot \frac{100}{125} = 53.6$.
4. Bruk regel (2). $\frac{987}{7896} \cdot 100 = 12.5$. Reidun brukte 12.5% av stipendet på øl i august.
5. Lønna i 2014 er grunnverdien og utgjør 100%. Lønna i 2015 er andel av grunnverdi. Bruk formel (3). $451000 \cdot \frac{100}{110} = 410000$

Oppgave 1.9 og 1.10, se fasit.

Oppgave 1.11 Bruk regneregul (1). Regnestykket blir $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.

Oppgavesett 2: Potensregning

Oppgave 2.1

1. $2^2 \cdot 2^4 = 2^{2+4} = 2^6$
2. $2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{-7} = 2^{4+5-7} = 2^{9-7} = 2^2$
3. $5^0 \cdot 5^1 = 5^{0+1} = 5^1 = 5$
4. $3^4 + 3^6 = 810$
5. $\frac{1}{3^{-3}} = 3^{-(-3)} = 3^3$
6. $\frac{3^2 \cdot 3^4}{3^0 \cdot 3^4} = \frac{3^{2+4}}{3^{0+4}} = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$
7. $2^5 \cdot 2^{-4} \cdot \frac{4^2}{4^3} = 2^{5-4} \cdot 4^{2-3} = 2^1 \cdot 4^{-1}$. Husk at $4 = 2^2$, så det blir $2^1 \cdot (2^2)^{-1} = 2^1 \cdot 2^{2 \cdot (-1)} = 2^{1-2} = 2^{-1}$
8. $\frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{(2^5)^{\frac{1}{3}}}{(2^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{5}{3}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5-2}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$
9. $\left(\frac{1}{4^{-3}}\right)^5 = \frac{1^5}{(4^{-3})^5} = \frac{1}{4^{-3 \cdot 5}} = \frac{1}{4^{-15}} = 4^{- -15} = 4^{15}$
10. $5^{\frac{1}{5}} \cdot \left(5^{\frac{1}{10}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{10}} = 5^{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}} = 5^{\frac{2}{5}}$
11. $\frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot (3^{-4})^5}{2^{-1} \cdot 3^{-2}} = \frac{3^2 \cdot 2^2 \cdot 3^{-4 \cdot 5}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}} = \frac{2^2}{2^{-1}} \cdot \frac{3^2 \cdot 3^{-20}}{3^{-2}} = 2^{2+1} \cdot 3^{2-20+2} = 2^3 \cdot 3^{-16}$
12. $\frac{4^0 \cdot 2^3 \cdot 4^{-1}}{4^{-2} \cdot 2^4} = 4^{0-1+2} \cdot 2^{3-4} = 4^1 \cdot 2^{-1} = 2^2 \cdot 2^{-1} = 2$
13. $\frac{3^2 \cdot 3^4}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3^5} = \frac{3^{2+4}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^5} = 3^{2+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-5} = 3^0 = 1$

Oppgave 2.2

1. $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$
2. $(4a^3)^3 = 4^3 a^{3 \cdot 3} = 64a^9$
3. $4 \cdot 4^{x-1} = 4^1 \cdot 4^{x-1} = 4^{1+x-1} = 4^x$
4. $(2x)^{-1} \cdot 4x = 2^{-1} x^{-1} \cdot 4x^1$. 4 er det samme som 2^2 , derfor blir dette $2^{-1+2} x^{-1+1} = 2^1 x^0 = 2$

5. $\frac{x^4 y^3}{x^3 y} = \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{y^3}{y} = x^{4-3} \cdot y^{3-1} = xy^2$
6. $x^7 \cdot (x^{-2})^3 = x^7 \cdot x^{(-2) \cdot 3} = x^7 \cdot x^{-6} = x^{7-6} = x^1 = x$
7. $(2x^{-2})^{-1} \cdot 2x^{-3} = 2^{-1} x^{-2 \cdot -1} \cdot 2x^{-3} = 2^{-1} x^2 \cdot 2^1 x^{-3} = 2^{-1+1} x^{2-3} = 1 \cdot x^{-1} = \frac{1}{x}$
8. $(a^2 b^{-1})^3 = a^{2 \cdot 3} b^{-1 \cdot 3} = a^6 b^{-3} = \frac{a^6}{b^3}$ eller $\left(\frac{a^2}{b}\right)^3$
9. $\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{\frac{6-1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$
10. $\frac{\sqrt{x^3 \cdot x^5}}{(x^2)^3} = \frac{(x^3 \cdot x^5)^{\frac{1}{2}}}{x^{2 \cdot 3}} = \frac{x^{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}}{x^{2 \cdot 3}} = x^{\frac{3}{2} + \frac{5}{2} - 6} = x^{\frac{8}{2} - \frac{12}{2}} = x^{-\frac{4}{2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
11. $\frac{(2x)^0 x^{-2}}{x^{-2-(-4)}} = \frac{2^0 x^0 x^{-2}}{x^2}$, husk at noe i null-potens alltid er en. $\frac{2^0 x^0 x^{-2}}{x^{-4}} = \frac{1x^{-2}}{x^{-4}} =$
12. $x^{(a-1)} \cdot x^{(1-a)} = x^{(a-1)+(1-a)} = x^{a-1+1-a} = x^0 = 1$

Oppgave 2.3

1. $\frac{x^3}{\sqrt{x}} = \frac{x^3}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{3-\frac{1}{2}} = x^{\frac{6-1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$
2. $\frac{\frac{a}{2a}}{\frac{3}{15}} = \frac{a}{15} \cdot \frac{3}{2a} = \frac{3a}{30a} = \frac{1}{10}$
3. $\frac{(z^{-3} x^4 y^2)^2}{(zxy)^4} = \frac{z^{-6} x^8 y^4}{z^4 x^4 y^4} = z^{-6-4} x^{8-4} y^{4-4} = z^{-10} x^4 y^0 = \frac{x^4}{z^{10}}$
4. Bruk tredje kvadratsetning for å faktorisere teller. Her er $a = x$ og $b = 6$. $x^2 - 36 = (x-6)(x+6)$. Nevner har en fellesfaktor fire som kan trekkes utenfor en parentes. $4x - 24 = 4(x-6)$. Da blir brøken $\frac{(x-6)(x+6)}{4(x-6)} = \frac{(x+6)}{4}$

Oppgave 2.4

1. $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$, da får vi $2.5 \cdot 0.1 = 0.25$
2. $10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0.00001$, da får vi $3 \cdot 0.00001 = 0.00003$
3. $10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$, da får vi $1.2 \cdot 10000 = 12000$

4. $10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$, da får vi $6.8 \cdot 100000 = 680000$.
5. $(3.2 \cdot 10^8) \cdot (1.6 \cdot 10^{-6}) = 3.2 \cdot 1.6 \cdot 10^8 \cdot 10^{-6} = 3.2 \cdot 1.6 \cdot 10^{8-6} = 5.12 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10 \cdot 10 = 100$, da får vi $5.12 \cdot 100 = 512$.
6. $(2 \cdot 10^4) \cdot (2 \cdot 10^{-2}) = 2 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{4-2} = 4 \cdot 10^2$ eller 400.

Oppgave 2.5

1. For å få 230000 må vi multiplisere 2.3 med 100 000. Det er fem nuller i 100 000. $100000 = 10^5$. Standardformen er $2.3 \cdot 10^5$
2. For å få 87500000 må vi multiplisere 8.75 med 10000000. Det er sju nuller i 10000000. $10000000 = 10^7$. Standardformen er $8.7 \cdot 10^7$
3. For å få 960000000 må vi multiplisere 9.6 med 100000000. Det er åtte nuller i 100000000. $100000000 = 10^8$. Standardformen er $9.6 \cdot 10^8$
4. For å få 0.0045 må vi multiplisere 4.5 med 0.001. Det er tre nuller i 0.001. (Eller vi kan tenke at $0.001 = \frac{1}{1000}$, og det er tre tall bak ett-tallet i nevner) $0.001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$. Standardformen er $4.5 \cdot 10^{-3}$
5. For å få 0.00000167 må vi multiplisere 1.67 med 0.000001. Det er seks nuller i 0.000001. (Eller vi kan tenke at $0.000001 = \frac{1}{1000000}$, og det er seks tall bak ett-tallet i nevner) $0.000001 = \frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ Standardformen er $1.67 \cdot 10^{-6}$
6. For å få 0.000087 må vi multiplisere 8.7 med 0.00001. Det er fem nuller i 0.00001. (Eller vi kan tenke at $0.00001 = \frac{1}{100000}$, og det er fem tall bak ett-tallet i nevner) $0.00001 = \frac{1}{100000} = 10^{-5}$. Standardformen er $8.7 \cdot 10^{-5}$

Oppgavesett 3: Regnerekkefølge, kvadratsetninger og faktorisering

Oppgave 3.1

1. $12 = 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3$
2. $25 = 5 \cdot 5$
3. $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$
4. $99 = 3 \cdot 33 = 3 \cdot 3 \cdot 11$

Oppgave 3.2

1. $(-3) \cdot (-5) = 15$
2. $3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 15 - 12 = 3$
3. $(-3) \cdot 2 + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$
4. $-3^2 + 2 = -3 \cdot 3 + 2 = -9 + 2 = -7$
5. $(-3)^2 + 2 = (-3) \cdot (-3) + 2 = 9 + 2 = 11$
6. $6 - (-5) \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = 6 - (-10) + (-15) = 6 + 10 - 15 = 1$
7. $-2 \cdot (3 + 1) + 4 \cdot 2^3$. Regn ut alle parenteser og potenser, $-2 \cdot (3 + 1) + 4 \cdot 2^3 = -2 \cdot 4 + 4 \cdot 8$. Multipliser og trekk sammen, $-2 \cdot 4 + 4 \cdot 8 = -8 + 32 = 24$.
8. $-2^4 + 3 \cdot (17 - 3^2) + (3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 5^2)$. Regn ut alle parenteser og potenser. $-16 + 3(17 - 9) + (3 \cdot 16 - 2 \cdot 25) = -16 + 3(8) + (48 - 50) = -16 + 3 \cdot 8 - 2$. Multipliser og trekk sammen, $-16 + 24 - 2 = 6$.
9. $\frac{18}{32} - (14 - 4^2)^3 = \frac{18}{32} - 2^3 = \frac{18}{9} - 8 = 2 - 8 = -6$
10. $-6^2 + \frac{(1+3^2)^2}{2} = -36 + \frac{(10)^2}{2} = -36 + 50 = 14$

Oppgave 3.3

1. $3x + 6 = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3(x + 2)$ (Tre er fellesfaktor)
2. $4x^2y^2 - 2xy + 8x^2y = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot y = 2xy(2xy - 1 + 4x)$ ($2xy$ er fellesfaktor)
3. $4x^2 - 16x + 16 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4(x^2 + 4x + 4)$ (4 er fellesfaktor)
4. $x^3 - 2x^2 + x = x \cdot x \cdot x - 2 \cdot x \cdot x + x = x(x^2 - 2x + 1)$ (x er fellesfaktor)
5. $(3xy)^2 - 12x^3y^2 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = 3x^2y^2(3 - 4x)$ ($3x^2y^2$ er fellesfaktor)

Oppgave 3.4

1. $(x+3)^2$. Bruk første kvadratsetning, $a = x$ og $b = 3$. $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$
2. $(3x-5)^2$. Bruk andre kvadratsetning, $a = 3x$ og $b = 5$. $(3x-5)^2 = 3x \cdot 3x - 3x \cdot 2 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 9x^2 - 30x + 25$
3. $(x+5)(x-5)$. Bruk tredje kvadratsetning, $a = x$ og $b = 5$. $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$
4. $(3x+4)(3x-4)$. Bruk tredje kvadratsetning, $a = 3x$ og $b = 4$. $(3x+4)(3x-4) = 9x^2 - 16$

Oppgave 3.5

1. $x^2 + 2x + 1$. Bruk første kvadratsetning, $a = x$ og $b = 1$. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$
2. $25 - 10x + x^2$. Her det to mulige løsninger, begge er riktige. Bruk uttrykket som det er, $25 - 10x + x^2$, og la $a = 5$ og $b = x$, svaret blir da $(5-x)^2$. Du kan også snu om på uttrykket, $x^2 - 10x + 25$, da blir $a = x$ og $b = 5$, svaret blir da $(x-5)^2$. Fordi $(5-x)^2 = (x-5)^2$.
3. $x^2 - 1$. Bruk tredje kvadratsetning, $a = x$ og $b = 1$. $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
4. $x^2 - 6x + 9$. Bruk andre kvadratsetning, $a = x$ og $b = 3$. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Oppgave 3.6

1. $5(x-2) = (5 \cdot x) + (-5 \cdot 2) = 5x - 10$
2. $-3(x-3) = (-3 \cdot x) + (-3) \cdot (-3) = -3x + 9$.
3. $2a - a(2-b) + 3(5+b) = 2a - a2 + ab + 15 + 3b = 3b + ab + 15$
4. $3(x+1) - 5(x-2) + 3(2-3x) = 3 \cdot x + 3 \cdot 1 + (-5) \cdot x + (-5) \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3x) = 3x + 3 - 5x + 10 + 6 - 9x = 19 - 11x$
5. $(2x+1)^2$. Bruk første kvadratsetning, $a = 2x$ og $b = 1$. $(2x+1)^2 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4x^2 + 4x + 1$.
6. $(x+5)(x-1) + 25 = x \cdot x + x \cdot (-1) + 5 \cdot x + 5 \cdot (-1) + 25 = x^2 - x + 5x - 5 + 25 = x^2 + 4x + 20$
7. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$. Bruk tredje kvadratsetning, $a = \sqrt{6}$ og $b = \sqrt{3}$. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 - 3 = 3$

Oppgave 3.7

1. Husk at $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Da får vi, $\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}\right)^2 = \frac{x^2}{x^{\frac{2}{2}}} = x^{2-1} = x$
2. $(3x+2)(3x+2) - (3x+2)(3x-2) = 9x^2 + 6x + 6x + 4 - (9x^2 + 6x - 6x - 4) = 9x^2 - 9x^2 + 6x + 6x - 6x + 6x + 4 + 4 = 12x + 8$. Alternativt kan du flytte $(3x+2)$ utafør slik at $(3x+2)(3x+2) - (3x+2)(3x-2) = (3x+2)(3x+2-3x+2) = 4(3x+2) = 12x+8$
3. $x(1+y^2) - 2x(y^2-y) - xy(2-y) = x + xy^2 - (2xy^2 - 2xy) - (xy^2 - xy^2) = x + xy^2 - 2xy^2 + 2xy - xy^2 + xy^2 = x + xy^2 - 2xy^2 + 2xy - xy^2 + xy^2 = x$
4. $2x+6 = 2(x+3)$ og $x^2-9 = (x-3)(x+3)$, slik at $\frac{(x-3)(x+3)}{2(x+3)} = \frac{x-3}{2}$
5. $\frac{(z^3x^{-2}y^7)^2}{(zxy)^5} = \frac{z^6x^{-4}y^{14}}{z^5x^5y^5} = z^{6-5}x^{-4-5}y^{14-5} = zx^{-9}y^9 = \frac{zy^9}{x^9}$ eller $z\left(\frac{y}{x}\right)^9$. Hvis $x = y$ så blir $z\left(\frac{y}{x}\right)^9 = z\left(\frac{y}{y}\right)^9 = z$

Oppgave 3.8

1. $x^2 - 7x + 10$. Start med å finne nullpunktene til uttrykket ved hjelp av ABC-formelen.
 $a = 1, b = -7$ og $c = 10$. $x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2}$ gir nullpunktene $x_1 = 5$ og $x_2 = 2$. Sett dette inn i nullpunkt-formelen, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, og få $(x-5)(x-2)$
2. $-x^2 - x + 12$. Start med å finne nullpunktene til uttrykket ved hjelp av ABC-formelen.
 $a = -1, b = -1$ og $c = 12$. $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{1 \pm 7}{-2}$ gir nullpunktene $x_1 = -4$ og $x_2 = 3$. Sett dette inn i nullpunkt-formelen, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, og få $-(x-3)(x+4)$
3. $2x^2 - 4x - 70$. Start med å finne nullpunktene til uttrykket ved hjelp av ABC-formelen. $a = 2, b = -4$ og $c = -70$. $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-70)}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm 24}{4}$ gir nullpunktene $x_1 = 7$ og $x_2 = -5$. Sett dette inn i nullpunkt-formelen, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, og få $2(x-7)(x+5)$
4. $4x^2 + 36x + 32$. Start med å finne nullpunktene til uttrykket ved hjelp av ABC-formelen. $a = 4, b = 36$ og $c = 32$. $x = \frac{-36 \pm \sqrt{(36)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 32}}{2 \cdot 4} = \frac{-36 \pm 28}{8}$ gir nullpunktene $x_1 = -1$ og $x_2 = -8$. Sett dette inn i nullpunkt-formelen, $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, og få $4(x+1)(x+8)$

Oppgavesett 4: Brøkgregning

Oppgave 4.1

$$1. \frac{15}{20} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$

$$2. \frac{x^2}{3x} = \frac{x \cdot x}{3 \cdot x} = \frac{x}{3}$$

$$3. \frac{a^2 b^2}{a^3 b} = \frac{a \cdot a \cdot b \cdot b}{a \cdot a \cdot a \cdot b} = \frac{b}{a}$$

$$4. \frac{aa+ab}{2a} = \frac{a \cdot (a+b)}{a \cdot 2} = \frac{a+b}{2}$$

Oppgave 4.2

$$1. \frac{5}{3} + \frac{4}{3} = \frac{9}{3}. \text{ Faktoriser } \frac{9}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3} = 3.$$

$$2. \frac{3}{4} - 3 = \frac{3}{4} - 3 \cdot \frac{4}{4} = \frac{3}{4} - \frac{12}{4} = \frac{3-12}{4} = -\frac{9}{4}$$

$$3. \frac{2}{8} + \frac{3}{5} = \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{8} = \frac{10}{40} + \frac{24}{40} = \frac{34}{40}. \text{ Faktoriser } \frac{34}{40} = \frac{2 \cdot 17}{2 \cdot 20} = \frac{17}{20}$$

$$4. \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} + \frac{2}{6} = \frac{x}{6} + \frac{2}{6} = \frac{x+2}{6}$$

$$5. \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{2}{6} + \frac{3}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}}. \text{ Bruk regel for brudde brøker. } \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{18}. \text{ Begge tall er delelige med to, så } \frac{10}{18} = \frac{5}{9}.$$

$$6. \frac{\frac{5a}{8}}{\frac{3}{4}} + \frac{\frac{7a}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{5a}{8 \cdot 3} + \frac{7a}{4 \cdot 6} = \frac{5a}{24} + \frac{7a}{24} = \frac{12a}{24}. \text{ Både 12 og 24 kan deles på 12, slik at } \frac{12a}{24} = \frac{a}{2}.$$

$$7. \frac{x^2}{x-1} - \frac{x}{x+1} = \frac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2(x+1) - x(x-1)}{(x-1)(x+1)}. x^2(x+1) - x(x-1) \text{ kan forkortes ytterligere. Faktoriser ut } x^2(x+1) - x(x-1) \text{ til } x^3 + x^2 - x^2 + x = x^3 + x = x(1+x^2). \text{ Det endelige resultatet blir da } \frac{x(x^2+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$8. \frac{2x}{x-1} + \frac{4x}{x+1} = \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+1)} + \frac{4x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x(x+1) + 4x(x-1)}{(x-1)(x+1)}. \text{ Telleren kan forkortes ytterligere. Faktoriser ut } 2x(x+1) + 4x(x-1) \text{ til } 2x^2 + 2x + 4x^2 - 4x = 6x^2 - 2x = x(6x-2). \text{ Det endelige resultatet blir da } \frac{x(6x-2)}{(x-1)(x+1)}$$

Oppgave 4.3

1. $\frac{3}{4} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$. Faktoriser nevnerne. $4 = 2 \cdot 2$, $10 = 5 \cdot 2$ og $5 = 5$. Har nevnerne en faktor til felles? Nei. Regn ut produktet av faktorene, husk å ta med tallet 2 to ganger (det dukker opp to ganger i nevneren til den første brøken). Minste fellesnevner blir derfor $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Den første brøken $\frac{3}{2 \cdot 2}$ må derfor multipliseres med $\frac{5}{5}$. Den andre brøken $\frac{1}{5 \cdot 2}$ må multiplisere med $\frac{2}{2}$. Den tredje brøken $\frac{2}{5}$ må multipliseres med $\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2}$.

Regnestykket blir da

$$\frac{15}{20} + \frac{2}{20} + \frac{8}{20} = \frac{25}{20}$$

Brøken kan forkortes ytterligere til

$$\frac{25}{20} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \frac{5}{4}$$

2. $\frac{1}{2} + \frac{4}{15} - \frac{3}{10}$. Faktoriser alle nevnerne. $2 = 2$, $15 = 3 \cdot 5$ og $10 = 2 \cdot 5$. Minste fellesnevner er $2 \cdot 5 \cdot 3$. Regnestykket blir

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{2}{2} - \frac{3}{2 \cdot 5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{15}{30} + \frac{8}{30} - \frac{9}{30} = \frac{14}{30}$$

Brøken kan forkortes ytterligere til

$$\frac{14}{30} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 15} = \frac{7}{15}$$

3. Start med å faktoriser alle nevnerne for å finnes minste fellesnevner. $36 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$, $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$ og $9 = 3 \cdot 3$. Minste fellesnevner er 36. $\frac{3}{36} + \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{2} - \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3+2-8}{36} = -\frac{3}{36} = -\frac{1}{12}$

4. Faktoriser alle nevnerne. $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$ og $2 = 2$. Minste fellesnevner er $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$. $\frac{1}{6} + \frac{5}{9} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{3} + \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{18} + \frac{10}{18} - \frac{9}{18} = \frac{4}{18}$. Det kan forkortes ytterligere $\frac{4}{18} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{2}{9}$. Hvorfor kan vi ikke bruke 9 som minste fellesnevner? Fordi $9 = 3 \cdot 3$ ikke har noen fellesnevner med 2.

5. $\frac{3}{y} - \frac{2}{3y} - \frac{4}{6y}$ Faktoriser alle nevnerne. $y = y$, $3y = 3 \cdot y$ og $6y = 3 \cdot 2 \cdot y$. Minste fellesnevner er $6y = 3 \cdot 2 \cdot y$. $\frac{3}{y} \cdot \frac{6}{6} - \frac{2}{3y} \cdot \frac{2}{2} - \frac{4}{6y} = \frac{18}{6y} - \frac{4}{6y} - \frac{4}{6y} = \frac{10}{6y}$. Det kan forenkles ytterligere for både 14 og $6y$ kan deles på to. $\frac{14}{6y} = \frac{5}{3y}$

6. Faktoriser alle nevnerne, $4 = 2 \cdot 2$ og $6 = 2 \cdot 3$. Minste fellesnevner er 12. $\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{3}{4} + \frac{3x}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{3x}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{9+6x}{12}$. Vi kan forenkle $\frac{9+6x}{12}$ enda mer. Faktoriser uttrykket $\frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot x}{3 \cdot 2 \cdot 2}$. Her er tre felles faktor i alle leddene og kan derfor strykes. Svaret blir da $\frac{3+2x}{4}$

7. Fellesnevner er $6x$. $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} - \frac{4}{3x} = \frac{2}{x} \cdot \frac{6}{6} - \frac{1}{2x} \cdot \frac{3}{3} - \frac{4}{3x} \cdot \frac{2}{2} = \frac{12}{6x} - \frac{3}{6x} - \frac{8}{6x} = \frac{1}{6x}$.

Oppgave 4.4

$$1. 5 \cdot \frac{25}{6} = \frac{5 \cdot 25}{6} = \frac{125}{6}$$

$$2. \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{35}{81}$$

$$3. \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{3}{6}\right)} = \frac{\frac{2 \cdot 6}{3}}{\left(\frac{3 \cdot 6}{6}\right)} = \frac{12}{3}. \text{ Brøken kan forkortes ytterligere: } \frac{12}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3} = 4$$

$$4. \frac{\left(\frac{3}{7}\right)}{8} = \frac{\left(\frac{3 \cdot 7}{7}\right)}{8 \cdot 7} = \frac{3}{56}$$

$$5. \frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{2} = \frac{28}{18}. \text{ Brøken kan forkortes ytterligere: } \frac{28}{18} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{14}{9}$$

$$6. \frac{\frac{8}{xy}}{\frac{x^2}{3}} = \frac{3}{x^2} \cdot \frac{8}{xy} = \frac{24}{x^3 y}$$

$$7. \frac{\frac{12}{5} \cdot \frac{z}{z}}{\frac{z}{z}} = \frac{\frac{12z}{5z}}{\frac{z}{z}} = \frac{12z}{5}$$

$$8. \frac{x}{\frac{4}{3}} = \frac{x}{\frac{4}{3}} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4x}{\frac{4}{12}} = \frac{x}{12}.$$

Oppgave 4.5

$$1. \text{ Start med å regne ut teller. } 1 + \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Regn ut nevner } 2 - \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}. \text{ Da blir regnestykket}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$$

$$2. \text{ Start med å regne ut teller. } \frac{1}{3} - \frac{5}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} - \frac{5}{6} = \frac{2}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{3}{6}. \text{ Regn ut nevner } \frac{2}{3} + \frac{5}{15} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} + \frac{5}{15} = \frac{10}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1. \text{ Da blir regnestykket}$$

$$\frac{\left(-\frac{3}{6}\right)}{1} = \frac{\left(-\frac{3 \cdot 6}{6}\right)}{1 \cdot 6} = -\frac{3}{6} = -\frac{3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

$$3. \text{ Start med å regne ut teller. } \frac{4}{5} - \frac{2}{25} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{5} - \frac{2}{25} = \frac{20}{25} - \frac{2}{25} = \frac{18}{25}. \text{ Regn ut nevner } \frac{1}{10} - \frac{3}{5} = \frac{1}{10} - \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{10} - \frac{6}{10} = -\frac{5}{10}. \text{ Regnestykket blir da}$$

$$\frac{\left(\frac{18}{25}\right)}{\left(-\frac{5}{10}\right)} = \frac{18}{25} \cdot \left(-\frac{10}{5}\right) = -\frac{18 \cdot 10}{25 \cdot 5} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5} = -\frac{36}{25}$$

4. Bruk regelen for bruddene brøk. $\frac{\frac{3y}{2}}{\frac{9}{y^2}} = \frac{3y}{2} \cdot \frac{y^2}{9} = \frac{3y^3}{18} = \frac{3y^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{y^3}{6}$
5. $\frac{b+\frac{b}{2}}{2b-\frac{b}{3}}$. Finn $b + \frac{b}{2} = \frac{2b}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3b}{2}$ og $2b - \frac{b}{3} = \frac{6b}{3} - \frac{b}{3} = \frac{5b}{3}$. Bruk regel for bruddene brøk. $\frac{3b}{2} \cdot \frac{3}{5b} = \frac{9b}{10b} = \frac{9}{10}$.
6. Her er nøkkelen og faktorisere uttrykket i teller ved hjelp av tredje kvadratsetning. $x^2 - 2$ blir da $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$. Da blir brøken $\frac{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}} = x + \sqrt{2}$
7. Start med å trekke sammen teller. $\frac{a}{2x-1} - \frac{a}{2x+1} = \frac{a}{2x-1} \cdot \frac{2x+1}{2x+1} - \frac{a}{2x+1} \cdot \frac{2x-1}{2x-1}$. Dette blir $\frac{a(2x+1) - a(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}$ som kan forenkles ytterligere til $\frac{a(2x+1-2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{2a}{(2x+1)(2x-1)}$. Regn ut $(2x+1)(2x-1) = 4x^2 - 1$. Da blir uttrykket $\frac{2a}{4x^2-1}$. Sett det inn i brøken $\frac{\frac{2a}{4x^2-1}}{\frac{1}{4x^2-1}}$. Du kan stryke $4x^2 - 1$ mot hverandre fordi den finnes i både teller og nevner. Da får du $\frac{2a}{1} = 2a$.
8. Splitt brøken, $\frac{3(2x-1)+5}{(2x-1)} = \frac{3(2x-1)}{(2x-1)} + \frac{5}{(2x-1)} = 3 + \frac{5}{(2x-1)}$
9. Start med å finne fellesnevner. Fellesnevner er $12ab$. $\frac{1}{3a} + \frac{1}{4b} + \frac{3a-8b}{6ab} = \frac{1}{3a} \cdot \frac{4b}{4b} + \frac{1}{4b} \cdot \frac{3a}{3a} + \frac{3a-8b}{6ab} \cdot \frac{2}{2} = \frac{4b}{12ab} + \frac{3a}{12ab} + \frac{6a-16b}{12ab}$. Trekk sammen, $\frac{4b-16b+3a+6a}{12ab} = \frac{9a-12b}{12ab}$. Både 9 og 12 er delelig med 3, slik at $\frac{9a-12b}{12ab} = \frac{3a-4b}{4ab}$. Det kan skrives $\frac{3a-4b}{4ab} = \frac{3}{4b} - \frac{1}{a}$
10. Først finner vi en fellesnevner. I dette tilfellet er fellesnevner $a(a+1)$ fordi nevneren til den siste brøken kan faktorerises til $a \cdot (a+1)$ og består dermed av både nevner til den første og andre brøken. Deretter utvider vi den første brøken med $(a+1)$ og den andre brøken med a slik at alle brøkene har felles nevner.

$$\frac{4}{a} \cdot \frac{(a+1)}{(a+1)} + \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a} - \frac{a^2}{a(a+1)}$$

$$\frac{4(a+1)}{a(a+1)} + \frac{a^2}{a(a+1)} - \frac{a^2}{a(a+1)}$$

Trekk sammen brøken:

$$\frac{4(a+1)}{a(a+1)}$$

Det er mulig å forenkle enda litt til:

$$\frac{4}{a} \cdot \frac{(a+1)}{(a+1)} = \frac{4}{a} \cdot 1 = \frac{4}{a}$$

Oppgave 4.6

$$1. \frac{\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a-1} = \frac{\left(\frac{(a-1) \cdot (a+1)}{(a+1)}\right)}{(a-1)(a+1)} = \frac{1}{(a+1)}$$

$$2. \frac{\frac{a-1}{\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}}{\left(\frac{(a+1)(a-1)}{(a-1)}\right)} = \frac{(a-1)^2}{(a+1)}$$

Oppgave 4.7

$$1. \frac{8}{6}, 1.33 \text{ og } \frac{40}{30}$$

$$2. \frac{7}{18}, 0.39 \text{ og } \frac{28}{72}$$

$$3. \frac{33}{99}, 0.33 \text{ og } \frac{11}{33}$$

Oppgavesett 5: Likninger

Oppgave 5.1 Løs:

1. Flytt alle ledd med x over på venstre side og alle ledd uten x over på høyre side. $5x + 3x - 7x = 6 - 6 + 2$. Dette gir $x = 2$.
2. Flytt alle ledd med x over på venstre side og alle ledd uten x over på høyre side. $\frac{x}{2} + x = 30$. Multipliser begge sider med 2. $3x = 60$. Divider begge sider med 3. $x = 20$.
3. Start med å regne ut alle parentesene. $3a + 6 + 8a - 4 = 13$. Flytt deretter alle ledd med a over på venstre side. $3a + 8a = 13 + 4 - 6$. Dette gir $11a = 11$. $a = 1$.
4. Start med å regne ut alle parentesene. $a + 1 = 2a - 3 - 2a$. Flytt deretter alle ledd med a over på venstreside. $a = -4$.
5. Vi starter med å multiplisere alle ledd med 12. $\frac{12y}{3} - 24y - 240 = \frac{12y}{4} + 36$. Flytt alle ledd med y over på venstreside, og alle ledd uten y over på høyreside. $4y - 24y - 3y = 240 + 36$. Dette gir $-23y = 276$. Divider begge sider med -23 . $y = -12$.
6. $\frac{3x}{2} + 5 = \frac{10x}{4} - 1$. Multipliser alle ledd på hver side av likhetstegnet med fire, $\frac{12x}{2} + 20 = \frac{40x}{4} - 4$. Forenkle brøk uttrykkene, $6x + 20 = 10x - 4$. Samle alle ledd med x på samme side, $24 = 4x$. Del på fire. $x = 6$.
7. Start med å løse ut parentesene og trekke sammen uttrykkene på hver side av likhetstegnet. $\frac{1}{2}(3 - 4x) + \frac{4}{2}(x + 3) = \frac{3}{2} - 2x + 2x + 6 = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$ og $\frac{15}{2} = \frac{30}{4}$. På den andre sida har vi $-\frac{1}{4}(x + 1) + 2 = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + 2 = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$. Da blir likninga $\frac{30}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$. Siden $\frac{30}{4} = -\frac{x}{4} + \frac{7}{4}$ når $30 = -x + 7$ har vi at $x = -23$.
8. Start med å løse ut parentesene og trekke sammen uttrykket på venstre side. $4\left(3x - \frac{4}{6}\right) + 2\left(x - \frac{2}{3}\right) = 12x - \frac{16}{6} + 2x - \frac{4}{3}$. Finn fellesnevner, $12x - \frac{16}{6} + 2x - \frac{4}{3} = 14x - \frac{48}{12} = 14x - 4$. Da får vi $14x - 4 = 10$ som gir $14x = 14$, $x = 1$.

Oppgave 5.2

1. $a = 4$, $b = 4$ og $c = 1$. Dette gir:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm 0}{8}$$

Svaret er $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$

2. $a = 3$, $b = 2$, $c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

Svaret er $x_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

3. $a = 1, b = 5, c = -150$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 25}{2}$$

Svaret er $x_1 = \frac{-5+25}{2} = 10, x_2 = \frac{-5-25}{2} = -15$.

Oppgave 5.3 Løs uten å bruke ABC-formelen:

1. Start med å dividere begge sider med 2. Dette gir $x^2 = 25$. Ta kvadratroten av begge sider. $x = \pm 5$. Løsninga er $x_1 = 5$ og $x_2 = -5$.
2. Leddet på venstreside har en fellesfaktor x så vi kan skrive likninga $x(3x - 12) = 0$. Den ene løsninga her er at x er lik null, $x_1 = 0$. Den andre løsninga finner vi ved å sette $3x - 12 = 0$ og løse for x . Det gir $x_2 = 4$.
3. Del alle ledd på fire. $x^2 = 4$. Samme som ovenfor, $x = \pm 2$
4. Del alle ledd på tre. $x^2 = 3$. $x = \pm \sqrt{3}$.
5. Få x^2 for seg sjøl. $5x^2 - 25 = 0$ gir $5x^2 = 25$. Del på fem. $x^2 = 5$. Ta kvadratrota. $x = \pm \sqrt{5}$
6. Skriv om til $x(\frac{3}{2}x + 2) = 0$. En løsning er $x_1 = 0$. Den andre gis ved $\frac{3}{2}x + 2 = 0$. $3x + 4 = 0$ når $x = -\frac{4}{3}$
7. Multipliser alle ledd med 3, da får vi $2x^2 - 15 = 0$. Flytt 15 over på høyre side og del alle ledd på 2. $x^2 = \frac{15}{2}$. Løsninga er $x_1 = -\sqrt{\frac{15}{2}}$ og $x_2 = \sqrt{\frac{15}{2}}$
8. Leddet på venstreside har en fellesfaktor x så vi kan skrive likninga slik $x(-2x + 3) = 0$. Den ene løsninga her er at x er lik null, $x_1 = 0$. Den andre løsninga finner vi ved å sette $-2x + 3 = 0$ og løse for x . Det gir $x_2 = \frac{3}{2}$
9. $3x^2 - 12 = 0$ kan skrives om til $3x^2 = 12$. Del alle ledd på 3. $x^2 = 4$. Slik at $x = \pm 2$, eller $x_1 = 2$ og $x_2 = -2$.

Oppgave 5.4

1. $-\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{8} = 0$. Vi starter med å faktorisere nevnerne for å finne minste fellesnevner. Vi får faktorene 2, 3 og $2 \cdot 2 \cdot 2$. Minste fellesnevner er derfor $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$. Da får vi likninga

$$-\frac{24}{2}y^2 + \frac{2 \cdot 24}{3}y + \frac{24}{8} = 0$$

som blir

$$-12y^2 + 16y + 3 = 0$$

Bruk ABC-formelen. Her er $a = -12$, $b = 16$ og $c = 3$.

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-12) \cdot 3}}{2 \cdot (-12)} = \frac{-16 \pm 20}{-24}$$

Det gir løsninga $x_1 = -\frac{1}{6}$ og $x_2 = \frac{3}{2}$

2. $\frac{x^2-16}{5} = 0$ når $x^2 - 16 = 0$. $x^2 = 16$ og $x = \pm 4$

3. $\frac{x}{3} = 12 - x$. Samle alle ledd med x på en side. $\frac{x}{3} + x = 12$. Trekk sammen venstre side, $\frac{4x}{3} = 12$. Multipliser begge sider med $\frac{3}{4}$, $\frac{4x}{3} \cdot \frac{3}{4} = 12 \cdot \frac{3}{4}$ gir $x = 9$.

4. $2x - 5(x - 2) = 13$ gir $2x - 5x + 10 = 13$ som blir $-3x = 3$ og $x = -1$

5. Løs likninga ved hjelp av ABC formelen. Her er $a = 1$, $b = -4$ og $c = -5$. $x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$. $x_1 = \frac{4+6}{2} = 5$ og $x_2 = \frac{4-6}{2} = -1$

6. Løs likninga ved hjelp av ABC formelen. $x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$, $x_1 = 3$ og $x_2 = -1$

7. $\frac{x^2-2x}{x+1} = 0$ når $x^2 - 2x = 0$. Trekk x utafør parentesen, $x(x - 2) = 0$. Løsninga er $x = 2$.

8. $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$. Først finner vi en fellesnevner. Siden nevnerne ikke har noe til felles fra før av blir fellesnevneren $x(2x - 1)$.

$$\frac{x}{2x-1} \cdot \frac{x}{x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{2x-1}{2x-1} = 0$$

$$\frac{x^2}{x(2x-1)} - \frac{2x-1}{x(2x-1)} = 0$$

Deretter trekker vi brøken sammen. Husk å skifte fortegn på det andre leddet. Dette gir:

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x(2x-1)} = 0$$

Husk andre kvadratssetning $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, dermed kan tellerskrives som $(x - 1)^2$. Da har vi likninga

$$\frac{(x-1)^2}{x(2x-1)} = 0$$

Husk at $\frac{0}{a} = 0$. Hvis teller er null blir altså hele brøken null. Sett derfor $(x - 1)^2 = 0$.

Den eneste løsninga på den likninga er $x = 1$. $x = 1$ er løsninga på $\frac{x}{2x-1} - \frac{1}{x} = 0$.

Vi kan også legge merke til alle verdier x ikke kan ha, $x \neq \frac{1}{2}$ og $x \neq 0$.

9. Start med å løse ut parentesene på begge sider av likhetstegnet og trekk sammen.
 $2x^2 - (x - 3)^2 = 2x^2 - (x^2 - 6x + 9) = x^2 + 6x - 9$. Venstre side blir $2(3x + 20) = 6x + 40$. Slik at likninga nå er $x^2 + 6x - 9 = 6x + 40$ som gir $x^2 = 49$. $x = \pm 7$.
10. $\sqrt{x^2 - 2} = 0$ når $x^2 - 9 = 0$. $x = \pm 3$
11. Løs ut parentesene, $3(x + \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(5 + 4x) = 3x + \frac{3}{2} - \frac{10}{3} - \frac{8x}{3}$. Finn fellesnevner (6), $3x + \frac{3}{2} - \frac{10}{3} - \frac{8x}{3} = \frac{18x}{6} + \frac{9}{6} - \frac{20}{6} - \frac{16x}{6} = \frac{2x-11}{6}$. $\frac{2x-11}{6} = 0$ når $2x - 11 = 0$.
 $x = \frac{11}{2}$
12. $\sqrt{\frac{x}{3} + 6} - 3 = -3$ er det samme som $\sqrt{\frac{x}{3} + 6} = 0$. $\sqrt{\frac{x}{3} + 6} = 0$ når $\frac{x}{3} + 6 = 0$.
 $\frac{x}{3} = -6$ og $x = -18$.

Oppgave 5.5

- $x + y = 1$, $x - y = 1$. Fra første likning får vi $x = 1 - y$. Sett det inn i andre likning $(1 - y) - y = 1$. Løs for $y = 0$. Sett inn $y = 0$ i den første likninga, det gir $x = 1$. Det gir løsningssettet $(x, y) = (1, 0)$
- $2y + 2x = 4$, $-2y + x = 2$. Vi løser første likning med hensyn på x , $x = 2 - y$. Sett det inn i andre likning $-2y + 2 - y = 2$ og løs for y . Det gir $y = 0$. Sett $y = 0$ inn i $x = 2 - y$. Dette gir $x = 2$. Løsningssettet er $(x, y) = (2, 0)$
- $2x + 5y = -4$, $x - 2y = 7$. Vi løser andre likning med hensyn på x . Det gir $x = 7 + 2y$. Sett det inn i den første likninga, $2 \cdot (7 + 2y) + 5y = -4$. Regn ut parentesen og få $14 + 9y = -4$. Løs med hensyn på y , $y = -2$. Sett $y = -2$ inn i den andre likninga og få $x = 7 + 2 \cdot (-2) = 3$. Løsningssettet er $(x, y) = (3, -2)$. Vi kan sjekke at dette stemmer ved å sette inn svaret i begge likningene:

$$2 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 6 - 10 = -4$$

$$3 - 2 \cdot (-2) = 3 + 4 = 7$$

Oppgave 5.6

- $2x + y = 3$, $x - y = 3$. Legg sammen likningene.

$$2x + y + x - y = 3 + 3$$

$$3x = 6$$

Det gir $x = 2$. Sett $x = 2$ inn i den andre likninga, $2 - y = 3$ og løs for y . $y = -1$. Løsningssettet er $(x, y) = (2, -1)$.

- $4a + b = 8$, $-4a + b = 0$. Legg sammen likningene:

$$4a + b - 4a + b = 8 + 0$$

$$2b = 8$$

Det gir $b = 4$. Sett $b = 4$ inn i den første likninga og løs for a . $4a + 4 = 8$ gir $4a = 4$.
 $a = 1$. Løsningssettet er $(a, b) = (1, 4)$

3. $2s - 3t = 21$, $3s + 2t = -1$. Legg merke til at her må vi bearbeide en eller begge likningene før vi kan legge de sammen. Vi multipliserer den første likninga med 2 på begge sider av likhetstegnet, og den andre likninga med 3 på begge sider av likhetstegnet. Da får vi:

$$4s - 6t = 42$$

$$9s + 6t = -3$$

Legg likningene sammen og få:

$$13s = 39$$

Løs for s , $s = 3$. Sett $s = 3$ inn i den første likninga. $2 \cdot 3 - 3t = 21$ og løs for t . $t = -5$. Løsninga på likningssettet er $(s, t) = (3, -5)$.

Oppgave 5.7

1. Innsetningsmetoden: Fra likning en: $x = 64 - y$, sett det inn i likning to. $32 + (64 - y) = y$ blir $96 = 2y$, $y = 48$. Sett det tilbake inn i likning en og få $x = 64 - 48 = 16$. Vi kan sjekke at det stemmer ved å sette det inn i likning en og to. $16 + 48 = 64$ og $32 + 16 = 48$.
2. Innsetningsmetoden: Løs likning 2 for x . $2x = 14 + 4y$, $x = 7 + 2y$. Sett inn i likning 1, $4(7 + 2y) + 10y = -8$, $28 + 18y = -8$, $18y = -36$, $y = -2$. Sett inn i $x = 7 + 2y = 7 + 2(-2) = 3$. $y = -2$ og $x = 3$.
3. Addisjonsmetoden. $-2x + 3y + 9x - 3y = 6 + 15$. Det blir $7x = 21$, $x = 3$. Sett inn i likning 1, $-6 + 3y = 6$ slik at $3y = 12$, $y = 4$.
4. Start med å dele alle ledd i likning en på 2, $2x + 2y = 2$ blir $x + y = 1$. Nå kan du bruke addisjonsmetoden, $(x + y) + (x - y) = 1 + 5$, $2x = 6$ som gir $x = 3$. Sett inn i likning en eller to, $x - y = 5$ blir da $3 - y = 5$ som gir $y = -2$.

Oppgave 5.8 La x være hvor mye en barnebillett koster, og y hvor mye en voksenbillett koster. Det gir likninga $3x + 2y = 56$. Vi veit også at en voksenbillett koster dobbelt så mye som en barnebillett, dette gir likninga $y = 2x$. Sett $y = 2x$ inn i $3x + 2y = 56$. Dette gir $3x + 2 \cdot 2x = 56$. Løs for x , $x = 8$. En barnebillett koster 8 kroner. Sett $x = 8$ inn i $y = 2x$. $y = 16$, en voksenbillett koster 16 kroner.

Oppgave 5.9 En kilo epler koster x kroner og en kilo appelsiner koster y kroner. Vi veit at to kilo epler og tre kilo appelsiner koster til sammen 68 kroner, $2x + 3y = 68$. Tre kilo epler og en kilo appelsiner koster 60 kroner, $3x + y = 60$.

Løs den siste likninga med hensyn til y , dette gir likninga $y = 60 - 3x$. Sett dette inn i $2x + 3y = 68$. $2x + 3 \cdot (60 - 3x) = 68$. Løs opp parentesene. $2x + 180 - 9x = 68$. Løs for x . $7x = 112 \rightarrow x = 16$. Sett dette inn i $y = 60 - 3x$. $y = 12$. En kilo epler koster 16 kroner og en kilo appelsiner koster 12 kroner.

Oppgave 5.10 La x være antall barn og y være antall voksne. Totalt ble det solgt 432 billetter, dette gir likninga $x + y = 432$. Inntekten var på 18240, dette gir likninga $20x + 50y = 18240$. Løs den første likninga med hensyn til x , $x = 432 - y$. Sett dette inn i den andre likninga. $20 \cdot (432 - y) + 50y = 18240$. Løs opp parentesen. $8640 + 30y = 18240$. Løs med hensyn til y , $y = 320$. Det var 320 voksne på fotballkampen. Sett $y = 320$ inn i $x = 432 - 320$ for å finne antall barn. $x = 112$. Det var 112 barn på fotballkampen.

Oppgave 5.11 (Tre ukjente)

5. Vær systematisk. Likning 1: $x + y = 3$. Likning 2: $x + z = -1$. Likning 3: $y + z = 0$. Løs likning 1 for x , $x = 3 - y$. Sett inn i likning 2, $3 - y + z = -1$ og løs for z . $z = y - 4$. Sett inn i likning 3, $y + y - 4 = 0$ gir $y = 2$. Bruk $y = 2$, sett inn i likning 1 og finn $x = 1$. Bruk $x = 1$, sett inn i likning 2 og finn $z = -2$.
6. Vær systematisk. Likning 1: $2x - y + x = 12$. Løs likning 1 for z , $z = 12 - 2x + y$. Likning 2: $x + y - z = -3$. Sett inn $z = 12 - 2x + y$ i likning 2, $x + y - (12 - 2x + y) = -3$. Det gir $x = 3$. Likning 3: $x + 3y - 2z = -11$. Sett inn for z og x i likning 3. $3 + 3y - 2(12 - 2 \cdot 3 + y) = -11$ og løs for y . $y = -2$. Det siste vi trenger å gjøre nå er å sette inn for $x = 3$ og $y = -2$ i likning 1, $z = 12 - 2 \cdot 3 + (-2) = 4$.

Oppgave 5.12 (Tre ukjente) Kall alderen til Anne for A , alderen til Berit for B og alderen til Christian for C . Anne, Berit og Christian er til sammen 100 år, så den første likninga blir $A + B + C = 100$. Berit er dobbelt så gammel som Anne, dette gir likninga $B = 2A$. Christian er 8 år yngre en Anne, dette gir likninga $C = A - 8$. Dette gir likningsettet

$$A + B + C = 100$$

$$B = 2A$$

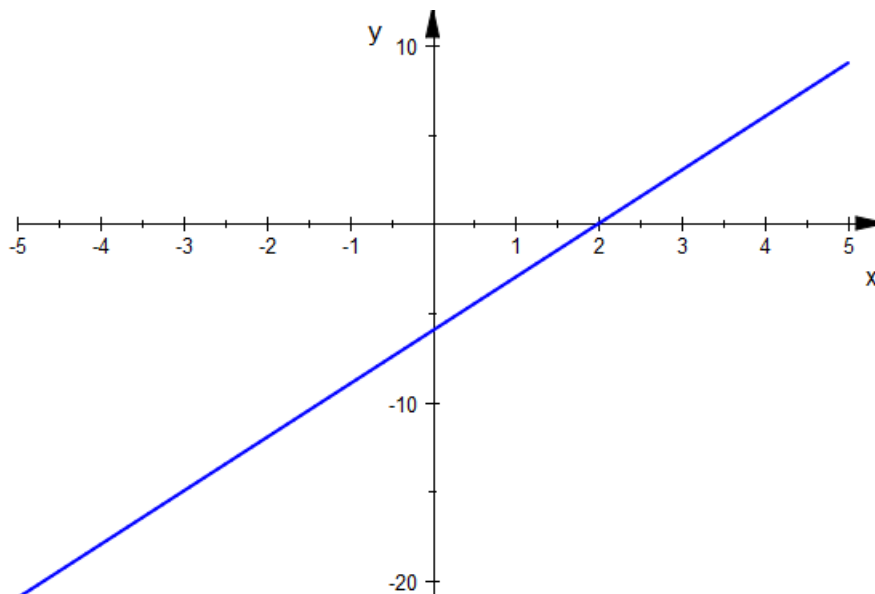
$$C = A - 8$$

Både B og C er gitt som et uttrykk av variabelen A . Vi setter disse to inn i den første likninga. Da får vi $A + 2A + A - 8 = 100$. Dette løser vi for A og får at $A = 27$. Deretter kan vi sette A inn i likninga for B , $B = 54$. Til slutt setter vi A inn i likninga for C , $C = 19$. Anne er 27 år gammel, Berit er 54 år gammel og Christian er 19 år.

Oppgavesett 6: Funksjoner

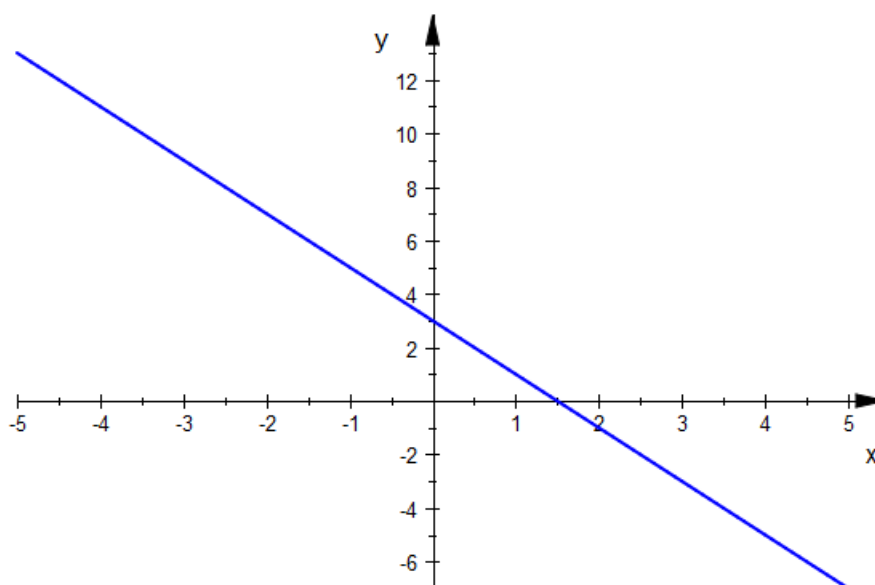
Oppgave 6.1

1. $f(x) = 3x - 6$



Likninga for ei rett linje er gitt som $y = ax + b$, der a er stigningstallet og b er konstantleddet. Stigningstallet er 3 ($a = 3$) og konstantleddet er -6 ($b = -6$). Grafen har et nullpunkt når $f(x) = 0$, altså $0 = 3x - 6$. Dette er ei likning, vi løser den med hensyn til x . Grafen har et nullpunkt når $x = 2$.

2. $f(x) = -2x + 3$



Stigningstallet er -2 ($a = -2$) og konstantleddet er 3 ($b = 3$). Nullpunktet finner vi ved å sette $f(x) = 0$. Dette gir likninga $-2x + 3 = 0$. Grafen har et nullpunkt når $x = \frac{3}{2} = 1,5$

Oppgave 6.2

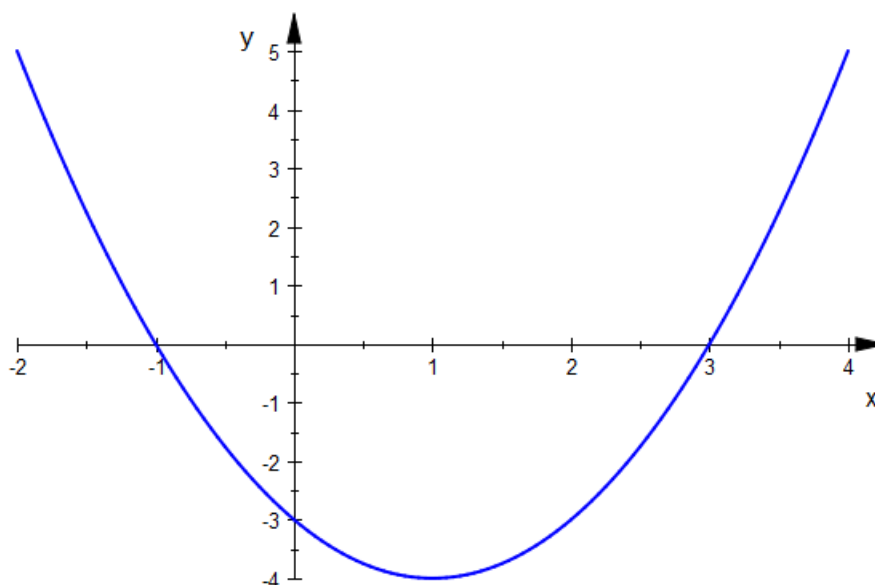
- $(0, 3) = (x_1, y_1)$ og $(2, 5) = (x_2, y_2)$. For å finne stigningstallet bruker vi formelen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dette gir $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$. Stigningstallet er 1. For å finne konstantleddet bruker vi formelen $b = y_1 - ax_1$, dette gir $b = 3 - 1 \cdot 0 = 3$. Konstantleddet er 3. En lineær funksjon skrives på formen $y = ax + b$. Dette gir funksjonsuttrykket $y = x + 3$. Vi kan sjekke at dette stemmer ved å sette inn for x . $x = 0$ gir $y = 1 \cdot 0 + 3 = 3$. $x = 2$ gir $y = 1 \cdot 2 + 3 = 5$.
- $(1, 7) = (x_1, y_1)$ og $(4, 22) = (x_2, y_2)$. For å finne stigningstallet bruker vi formelen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dette gir $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{22 - 7}{4 - 1} = \frac{15}{3} = 5$. Stigningstallet er 5. For å finne konstantleddet bruker vi formelen $b = y_1 - ax_1$, dette gir $b = 7 - 5 \cdot 1 = 2$. Konstantleddet er 2. En lineær funksjon skrives på formen $y = ax + b$. Dette gir funksjonsuttrykket $y = 5x + 2$. Vi kan sjekke at dette stemmer ved å sette inn for x . $x = 1$ gir $y = 5 \cdot 1 + 2 = 7$. $x = 4$ gir $y = 5 \cdot 4 + 2 = 22$.
- $(1, 1) = (x_1, y_1)$ og $(-2, 7) = (x_2, y_2)$. For å finne stigningstallet bruker vi formelen $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dette gir $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 1}{-2 - 1} = \frac{6}{-3} = -2$. Stigningstallet er -2. For å finne konstantleddet bruker vi formelen $b = y_1 - ax_1$, dette gir $b = 1 - (-2) \cdot 1 = 3$. Konstantleddet er 3. En lineær funksjon skrives på formen $y = ax + b$. Dette gir funksjonsuttrykket $y = -2x + 3$.
- $(1, 6) = (x_1, y_1)$ og $(3, 14) = (x_2, y_2)$. $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (formel for å finne stigningstallet) og få $a = \frac{14 - 6}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$. Stigningstallet er fire. Da veit vi at funksjonen ser slik ut $f(x) = 4x + b$. b er konstantleddet. $y_1 = 4x_1 + b$. Løs for b , $b = y_1 - 4x_1$ det blir $b = 6 - 4 = 2$. $f(x) = 4x + 2$.
- $(1, 2) = (x_1, y_1)$ og $(4, 11) = (x_2, y_2)$. $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11 - 2}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$. Stigningstallet er tre. $y = ax + b$, $y_1 = ax_1 + b$, $2 = 3 \cdot 1 + b$. Løs for b , $b = 2 - 3 = -1$. Likninga er $f(x) = 3x - 1$.

Oppgave 6.3

- $f(2) = \sqrt{2-2} = 0$, $f(6) = \sqrt{6-2} = 2$ og $f(a+2) = \sqrt{a+2-2} = \sqrt{a}$
- $f(0) = 1$, $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$ og $f(\sqrt{a-1}) = \sqrt{\sqrt{a-1}^2 + 1} = \sqrt{a-1+1} = \sqrt{a}$
- $f(\frac{3}{2}) = \frac{-2 \cdot \frac{3}{2} + 5}{4} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ og $f(2) = \frac{-2 \cdot 2 + 5}{4} = \frac{-4+5}{4} = \frac{1}{4}$.

Oppgave 6.4

- Med en graf er det lettere å se bunnpunkt:



Fra denne grafen ser vi at et mulig bunnpunkt er når $x = 1$. Vi kan sjekke om dette er riktig ved å lage en liten tabell:

x	0	1	2
$f(x)$	-3	-4	-3

$x = 1$ er et bunnpunkt. For å finne nullpunktene må vi løse likninga $0 = x^2 - 2x - 3$ ved hjelp av ABC-formelen. Grafen har to nullpunkter, $x_1 = -1$ og $x_2 = 3$.

- En annen måte å skrive $f(x)$ på er $f(x) = -x^2 + 2x + 1$. Her kan du enten skissere grafen og vise at den har ett toppunkt eller referere til hvis $a < 0$ så har grafen et toppunkt. Symmetrilinja er gitt som $x = \frac{-b}{2a}$. Her er $a = -1$ og $b = 2$ slik at grafen er symmetrisk rundt $x = \frac{-2}{-2} = 1$.
- Bunnpunkt fordi $a > 0$. $ax^2 + bx + c$, så her er $a = 1$, $b = -2$ og $c = 1$. Symmetrilinja er gitt ved $x = \frac{-b}{2a}$. Symmetrisk rundt $x = \frac{2}{2} = 1$.

Oppgave 6.5

- Antall centimeter hun hopper i dag er konstantleddet, $b = 160$. Stigningstallet er hvor mye høyden øker pr. år i åra som kommer, $a = 4$. Likninga for ei rett linje er gitt ved $y = ax + b$. Den matematiske modellen som viser hvor høyt Stine hopper om x år er $y = 4x + 160$.
- $x = 5$. Det gir $y = 4 \cdot 5 + 160 = 180$. Stine hopper 180 cm om 5 år etter denne modellen.
- $y = 200$. Det gir likninga $200 = 4x + 160$. Løs for x , $x = 10$. Stine hopper 200 cm etter 10 år.

Oppgave 6.6

1. $y = 11x$

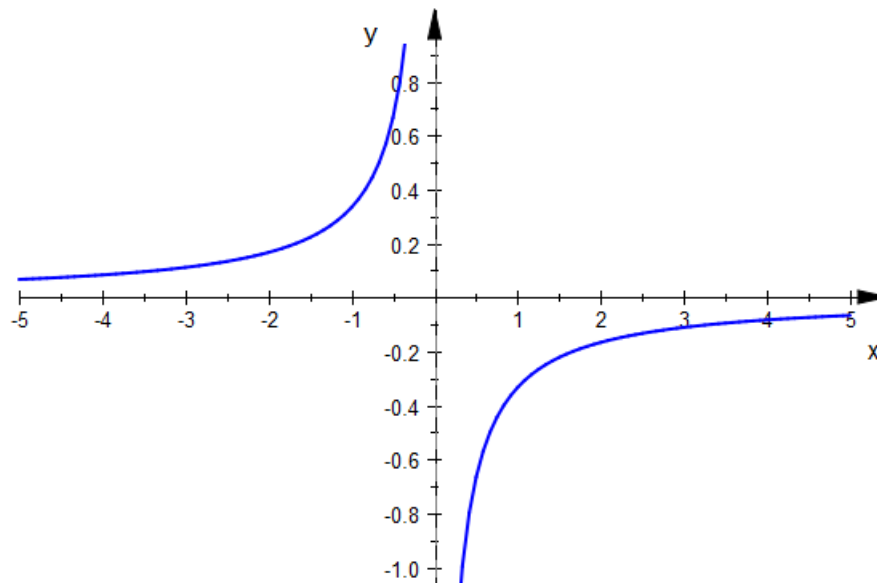
2. $y = 80t$

Oppgave 6.7

1. Antall kilo blåbær Lars har plukket er konstantleddet, $b = 4$. Stigningstallet er antall kilo blåbær Lars plukker i timen, $a = 1$. $f(t) = t + 4$. Om seks timer har Lars $f(6) = 10$ kilo blåbær.
2. Konstantleddet er pengene han fikk av den gamle tanta si, $b = 1500$. Stigningstallet er $a = 500$, summen han sparer hver måned. $f(x) = 1500 + 500x$
3. $1500 + 500x = 17000$, gir $500x = 15500$. $x = 31$, Reidar må spare i 31 måneder.
4. $f(x) = 1500 + 1000x$. $1000x = 15500$. $x = 15,5$. Nå må Reidar spare i 15,5 måneder.

Oppgave 6.8

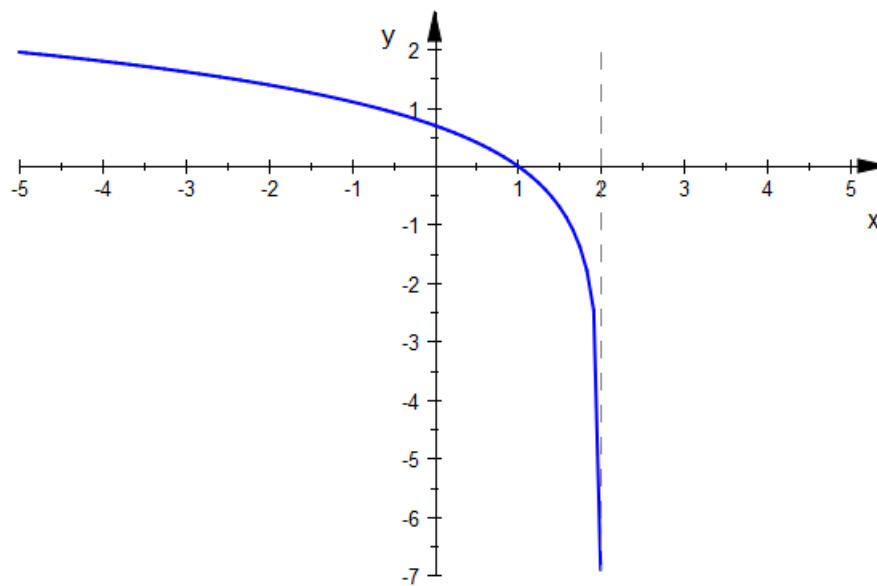
1. $f(x) = \frac{1}{-3x}$



Definisjonsmengde: $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, $D_f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ eller $D_f : x \neq 0$. x kan ha alle mulige verdier unntatt null.

Verdimengde: $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$, $V_f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ eller $V_f : y \neq 0$. y kan ha alle mulige verdier unntatt 0.

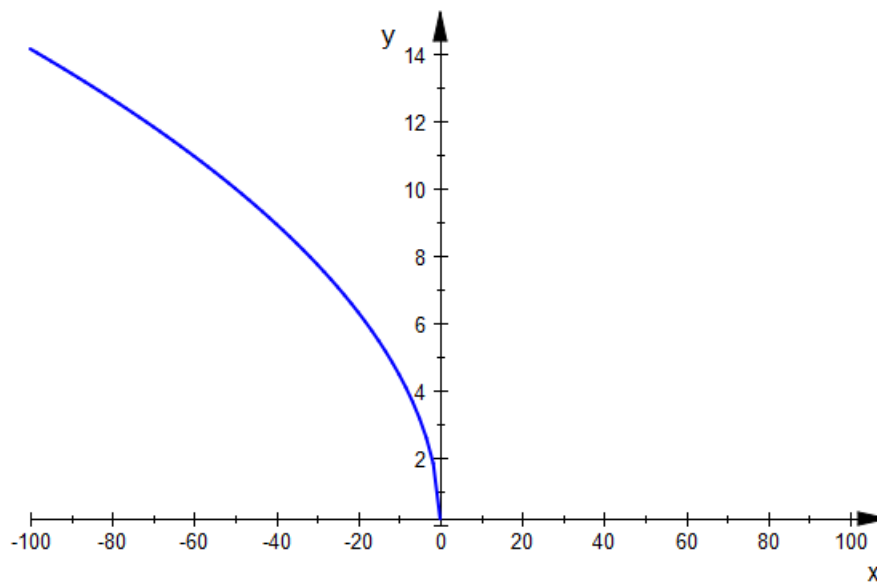
2. $f(x) = \ln(2 - x)$



Definisjonsmengde: $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$, $D_f : (2, \infty)$, $D_f : -\infty < x < 2$ x må være mindre enn to.

Verdimengde: $V_f : \{y \in \mathbb{R}\}$, $V_f : (-\infty, \infty)$ eller $V_f : -\infty < y < \infty$. y kan anta alle mulige verdier.

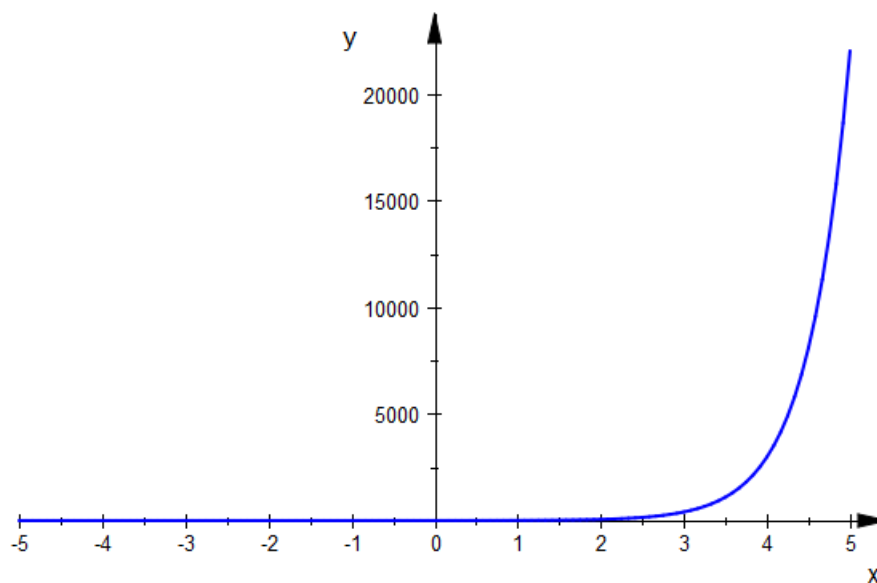
3. $f(x) = \sqrt{-2x}$



Definisjonsmengde: $D_f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$, $D_f : (-\infty, 0]$ eller $D_f : x \leq 0$. x må være mindre eller lik null.

Verdimengde: $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$, $V_f : [0, \infty)$ eller $V_f : y \geq 0$. y må være større eller lik null.

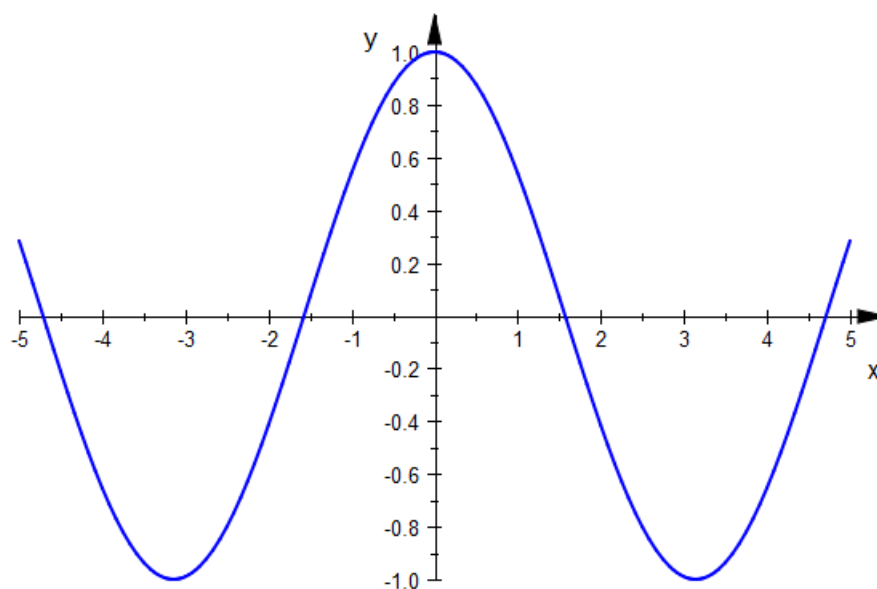
4. $f(x) = e^{2x}$



Definisjonsmengde: $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$, $D_f : (-\infty, \infty)$ eller $D_f : -\infty < x < \infty$. x kan ha alle mulige verdier.

Verdimengde: $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$, $V_f : (0, \infty)$ eller $V_f : y > 0$. y må være større enn null (strengt positiv).

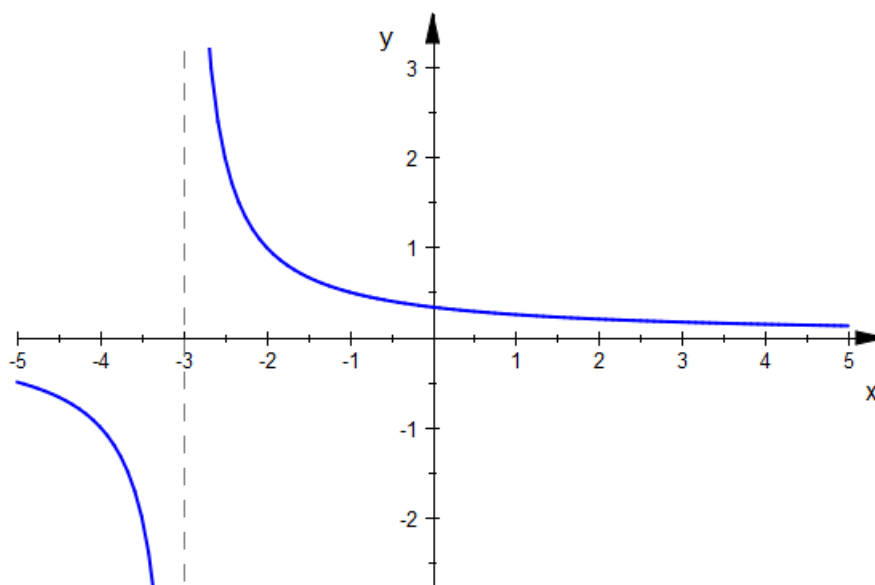
5. $f(x) = \cos(x)$



Definisjonsmengde: $D_f : \{x \in \mathbb{R}\}$, $D_f : (-\infty, \infty)$, $D_f : -\infty < x < \infty$. x kan ha alle mulige verdier.

Verdimengde: $V_f : \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$, $V_f : [-1, 1]$ eller $V_f : -1 \leq y \leq 1$. y beveger seg mellom -1 og 1.

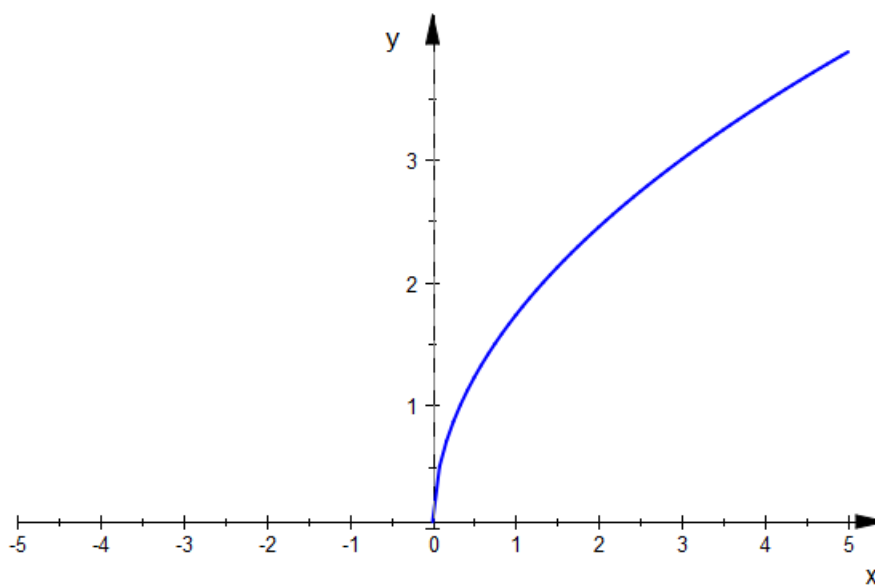
6. $f(x) = \frac{1}{3+x}$



Definisjonsmengde: $D_f : (-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$, $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x \neq -3\}$ eller $D_f : x \neq -3$. x kan ikke være minus tre fordi vi kan ikke dele på null.

Verdimengde: $V_f : (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $V_f : \{y \in \mathbb{R} | y \neq 0\}$ eller $V_f : y \neq 0$. y kan være alt mulig, bare ikke null.

7. $f(x) = \sqrt{3x}$

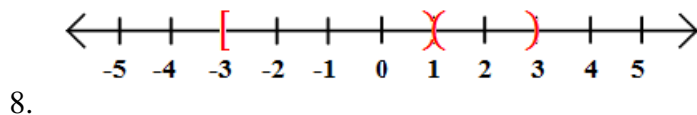
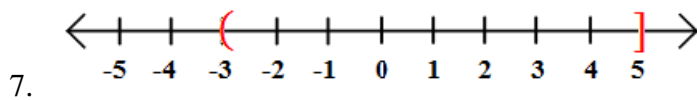
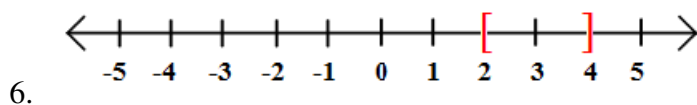
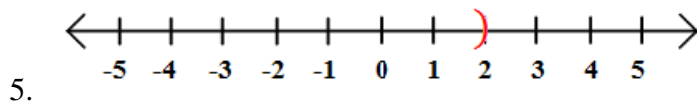
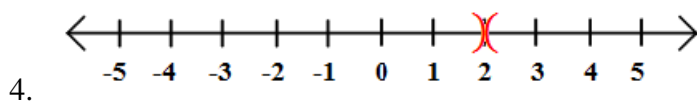
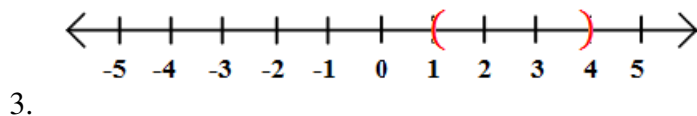
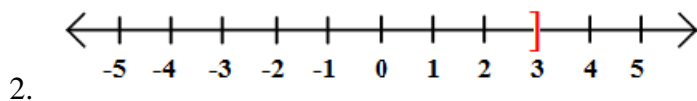
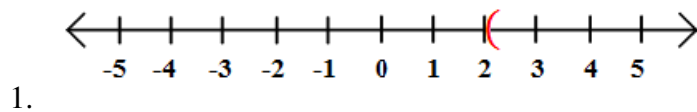


Definisjonsmengde: $D_f : [0, \infty)$, $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ eller $D_f : x \geq 0$. x kan være alle ikke negative tall.

Verdimengde: $V_f : [0, \infty)$, $V_f : \{y \in \mathbb{R} | y \geq 0\}$ eller $V_f : y \geq 0$. y kan være alle ikke negative tall.

Oppgavesett 7: Ulikheter

Oppgave 7.1: Tallinja



Oppgave 7.2

1. $3 - 2x > 7$

$-2x > 4$ Trekk fra 3 på begge sider.

$\frac{-2x}{-2} < \frac{4}{-2}$ Divider med -2 på begge sider. Husk å snu ulikhetstegnet.

$x < -2$

2. $x + 2 > 2x + 3$

$2 > x + 3$ Trekk fra x på begge sider.

$-1 > x$ Trekk fra 3 på begge sider.

$$3. \quad 8 - 3x > 7 - 2x$$

$8 > 7 + x$ Legg til $3x$ på begge sider.

$1 > x$ Trekk fra 7 på begge sider.

$$4. \quad 3y - 8 \geq 4 + 2(y - 3)$$

$3y - 8 \geq 2y - 2$ Regn ut parentesen og trekk sammen.

$y - 8 \geq -2$ Trekk fra $2y$ på begge sider.

$y \geq 6$ Legg til 8 på begge sider.

$$5. \quad 2(s - 1) - 3(1 - s) < s + 3$$

$2s - 2 - 3 + 3s < s + 3$ Regn ut parentesen.

$5s - 5 < s + 3$ Trekk sammen.

$4s - 5 < 3$ Trekk fra s på begge sider.

$4s < 8$ Legg til 5 på begge sider.

$s < 2$ Divider med 4 på begge sider.

$$6. \quad t + 3 - 2(3 + 2t) < 5(2 - t)$$

$t + 3 - 6 - 4t < 10 - 5t$ Regn ut parentesen.

$-3 - 3t < 10 - 5t$ Trekk sammen.

$-3 + 2t < 10$ Legg til $5t$ på begge sider.

$2t < 13$ Legg til 3 på begge sider.

$t < \frac{13}{2}$ Divider med 2 på begge sider.

$$7. \quad 5x + 2 < 3x - 1$$

$5x < 3x - 3$ Flytt alle ledd uten x til samme side.

$2x < -3$ Flytt alle ledd med x til samme side.

$x < -\frac{3}{2}$ Divider med 2.

$$8. \quad -\frac{6x}{4} - 2 < x - 3$$

$-6x - 8 < 4x - 12$ Multipliser alle ledd med 4

$-6x - 4x < -12 + 8$ Flytt alle ledd med x på samme side, flytt alle ledd uten x på andre siden

$-10x < -4$ Divider begge sider med -10 . Husk å snu krokodillegapet.

$x > \frac{4}{10}$ Kan forenkles til $x > \frac{2}{5}$

$$9. -\frac{3x}{2} - 1 > x + 2$$

$-3x - 2 > 2x + 4$ Multipliser alle sider med 2.

$-2 - 4 > 2x + 3x$ Flytt alle ledd med x på samme side, flytt alle ledd uten x på andre siden

$-6 > 5x$ Divider med 6.

$$-\frac{6}{5} > x$$

$$10. 2x + 1 > 5x - 5$$

$1 + 5 > 5x - 2x$ Flytt alle ledd med x på samme side, flytt alle ledd uten x på andre siden

$6 > 3x$ Divider med 3.

$$2 > x$$

$$11. 2x - \frac{x-1}{3} > x$$

$6x - (x - 1) > 3x$ Multipliser alle sider med 3.

$5x + 1 > 3x$ Flytt alle ledd med x på samme side.

$2x > -1$ Divider med 2.

$$x > -\frac{1}{2}$$

Oppgave 7.3

$$1. (x - 2)(x - 4) < 0$$

Ulikheten er negativ hvis 1) $(x - 2) < 0$ og $(x - 4) > 0$ eller 2) $(x - 2) > 0$ og $(x - 4) < 0$.

- *Alternativ 1:* $(x - 2) < 0$ gir $x < 2$ og $(x - 4) > 0$ gir $x > 4$. Altså må x være under to, men over fire. Det går ikke så vi går videre:

- *Alternativ 2:* $(x - 2) > 0$ gir $x > 2$ og $(x - 4) < 0$ gir $x < 4$. Dette gir $2 < x < 4$. Ulikheten er negativ hvis x ligger mellom to og fire.

Svaret er $x \in (2, 4)$, $2 < x < 4$, x ligger mellom to og fire.

	$x = 2$	$x = 4$	
$x - 2$	-----	-----	-----
$x - 4$	-----	-----	-----
$(x - 4)(x - 2)$	-----	-----	-----

$$2. (2x-3)(x+3) > 0$$

Ulikheten er positiv hvis 1) $(2x-3) > 0$ og $(x+3) > 0$ eller 2) $(2x-3) < 0$ og $(x+3) < 0$.

- *Alternativ 1:* $(2x-3) > 0$ gir $x > \frac{3}{2}$ og $(x+3) > 0$ gir $x > -3$. Altså må x være over $\frac{3}{2}$, $x > \frac{3}{2}$.
- *Alternativ 2:* $(2x-3) < 0$ gir $x < \frac{3}{2}$ og $(x+3) < 0$ gir $x < -3$. Altså må x være mindre enn -3 , $x < -3$.

Svaret er $x \in (-\infty, -3) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$, $x < -3$ og $x > \frac{3}{2}$, x kan være mindre enn -3 og større enn $\frac{3}{2}$.

	$x = -3$		$x = \frac{3}{2}$	
$2x-3$	-----		-----	-----
$x+3$	-----		-----	-----
$(2x-3)(x+3)$	-----		-----	-----

$$3. 3x^2 + 13x + 4 > 0$$

Først, bruk nullpunktmetoden for å faktorisere uttrykket: $x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-13 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{-13 \pm 11}{6}$. Dette gir $x_1 = -4$ og $x_2 = -\frac{1}{3}$. Dette gir $3x^2 + 13x + 4 = 3(x+4)(x+\frac{1}{3}) = (x+4)(3x+1)$. Dermed veit vi at ulikheten er positiv hvis 1) $(x+4) > 0$ og $(3x+1) > 0$ eller 2) $(x+4) < 0$ og $(3x+1) < 0$.

- *Alternativ 1:* $(x+4) > 0$ gir $x > -4$ og $(3x+1) > 0$ gir $x > -\frac{1}{3}$. Altså må x være større enn en tredjedel, $x > -\frac{1}{3}$.
- *Alternativ 2:* $(x+4) < 0$ gir $x < -4$ og $(3x+1) < 0$ gir $x < -\frac{1}{3}$. Altså må x være under minus fire, $x < -4$.

Svaret er $x \in (-\infty, -4) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$, $x < -4$ og $x > -\frac{1}{3}$, x kan være mindre enn -4 og større enn $-\frac{1}{3}$.

	$x = -4$		$x = -\frac{1}{3}$	
$x+4$	-----		-----	-----
$3x+1$	-----		-----	-----
$(x+4)(3x+1)$	-----		-----	-----

$$4. 4x - x^2 > 0$$

Faktoriser uttrykket. $4x - x^2 = x(4-x)$. Dette uttrykket er større enn null hvis 1) $x > 0$ og $4-x > 0$ eller 2) $x < 0$ og $4-x < 0$.

- *Alternativ 1:* $4-x > 0$ gir $x < 4$. Altså må x være større enn null, men mindre enn fire. $0 < x < 4$.

- *Alternativ 2:* $4 - x < 0$ gir $x > 4$. Altså må x være mindre enn null og større enn fire. Det er ikke mulig.

Svaret er $x \in (0, 4)$, $0 < x < 4$, x må ligge mellom null og fire.

	$x = 0$		$x = 4$	
x	-----		-----	
$4 - x$	-----		-----	
$x(4 - x)$	-----		-----	

Oppgave 7.4

1. $\frac{x-3}{x+1} > 0$

Ulikheten er positiv hvis 1) $(x - 3) > 0$ og $(x + 1) > 0$ eller 2) $(x - 3) < 0$ og $(x + 1) < 0$.

- *Alternativ 1:* $(x - 3) > 0$ gir $x > 3$ og $(x + 1) > 0$ gir $x > -1$. Altså må x være større enn tre, $x > 3$
- *Alternativ 2:* $(x - 3) < 0$ gir $x < 3$ og $(x + 1) < 0$ gir $x < -1$. Altså må x være mindre enn minus en, $x < -1$

Svaret $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$, $x < -1$ og $x > 3$, x kan være mindre enn minus en eller større enn tre.

	$x = -1$		$x = 3$	
$x - 3$	-----		-----	
$x + 1$	-----		-----	
$\frac{x-3}{x+1}$	-----		-----	

2. $\frac{2}{x+3} > 0$

Ulikheten er positiv hvis $(x + 3) > 0$. Det skjer når $x > -3$

3. $\frac{-2x+4}{x+1} < 0$

Ulikheten er positiv hvis 1) $(-2x + 4) > 0$ og $(x + 1) > 0$ eller 2) $(-2x + 4) < 0$ og $(x + 1) < 0$

- *Alternativ 1:* $(-2x + 4) > 0$ gir $x < 2$ og $(x + 1) > 0$ gir $x > -1$. Altså må x være større enn minus en, $x > -1$.
- *Alternativ 2:* $(-2x + 4) < 0$ gir $x > 2$ og $(x + 1) < 0$ gir $x < -1$. Altså må x være mindre enn minus en, $x < -1$.

Svaret $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, $x < -1$ og $x > 2$, x kan være mindre enn minus en eller større enn to.

	$x = -1$		$x = 2$	
$-2x + 4$	-----		-----	
$x + 1$	-----		-----	
$\frac{-2x+4}{x+1}$	-----		-----	

$$4. \frac{4+x}{3-2x} \geq 0$$

- *Alternativ 1 (ulikhet):* $(4+x) > 0$ gir $x > -4$ og $(3-2x) > 0$ gir $x < \frac{3}{2}$. Altså må x være mindre enn tre todelar og større enn minus fire, $-4 < x < \frac{3}{2}$ eller $x \in (-4, \frac{3}{2})$
- *Alternativ 2 (ulikhet):* $(4+x) < 0$ gir $x < -4$ og $(3-2x) < 0$ gir $x > \frac{3}{2}$. x kan ikke samtidig være mindre enn minus fire og større enn tre todelar.
- *Alternativ 3 (likhet):* $\frac{4+x}{3-2x} = 0$. Det gir $4+x = 0$, $x = -4$.

Svaret er $x \in [-4, \frac{3}{2})$ eller $-4 \leq x < \frac{3}{2}$.

Oppgave 7.5

1. $\frac{x}{2} < \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + x$. Først, finn en fellesnevner. I dette tilfellet er fellesnevneren $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. Multipliser begge sider med 30

$$15x < 6 - 10 + 30x$$

$$0 < -4 + 15x \quad \text{Trekk fra } 15x \text{ på begge sider.}$$

$$4 < 15x \quad \text{Legg til fire på begge sider.}$$

$$\frac{4}{15} < x \quad \text{Divider begge sider med 15.}$$

$$2. \frac{x+4}{3} > \frac{2x+1}{3} + 1$$

$$x+4 > 2x+1+3 \quad \text{Multipliser alle ledd med tre.}$$

$$4 > x+4 \quad \text{Trekk fra } x \text{ på begge sider.}$$

$$0 > x \quad \text{Trekk fra fire på begge sider.}$$

$$3. \frac{8-6x}{1-x} > x+2$$

$$\frac{8-6x}{1-x} > \frac{(x+2)(1-x)}{(1-x)} \quad \text{Multipliser } x+2 \text{ med } \frac{1-x}{1-x}.$$

$$\frac{8-6x}{1-x} > \frac{-x^2-x+2}{1-x} \quad \text{Regn ut parentesene.}$$

$$\frac{8-6x+x^2+x-2}{1-x} > 0 \quad \text{Flytt alle ledd over til venstre side.}$$

$$\frac{x^2-5x+6}{1-x} > 0 \quad \text{Trekk sammen.}$$

$\frac{x^2-5x+6}{1-x} > 0$ hvis 1) $x^2 - 5x + 6 > 0$ og $1-x > 0$ eller 2) $x^2 - 5x + 6 < 0$ og $1-x < 0$. Før vi ser nærmere på de to alternativene, bruker vi nullpunktmetoden for å faktorisere ut

$$x^2 - 5x + 6. \text{ ABC-formelen gir svaret på likninga } x^2 - 5x + 6 = 0, x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}, x_1 = 2 \text{ og } x_2 = 3. \text{ Ved hjelp av nullpunktmetoden veit vi da at } x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

- *Alternativ 1:* $1 - x > 0$ når $x < 1$. Finn ut for hvilke verdier $(x - 2)(x - 3) > 0$
 - *Alternativ 1.a:* $(x - 2) > 0$ når $x > 2$ og $(x - 3) > 0$ når $x > 3$. Altså må $x > 3$ og $x < 1$, det går ikke.
 - *Alternativ 1.b:* $(x - 2) < 0$ når $x < 2$ og $(x - 3) < 0$ når $x < 3$. Altså må $x < 1$.
- *Alternativ 2:* $1 - x < 0$ når $x > 1$. Finn ut for hvilke verdier $(x - 2)(x - 3) < 0$
 - *Alternativ 2.a:* $(x - 2) > 0$ når $x > 2$ og $(x - 3) < 0$ når $x < 3$. Altså må $2 < x < 3$.
 - *Alternativ 2.b:* $(x - 2) < 0$ når $x < 2$ og $(x - 3) > 0$ når $x > 3$. Det er ikke mulig.

Dette gir to løsninger 1) $x \in (2, 3)$ og 2) $x \in (-\infty, 1)$. Svaret er $x \in (2, 3) \cup (-\infty, 1)$, $2 < x < 3$ og $x < 1$

	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
$x - 2$	-----	-----	-----
$x - 3$	-----	-----	-----
$1 - x$	-----	-----	-----
$\frac{(x - 2)(x - 3)}{1 - x}$	-----	-----	-----

Oppgavesett 8: Summetegn

Oppgave 8.1

1. $\sum_{i=1}^3 2i = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 4 + 6 = 12$
2. $\sum_{i=0}^3 i + 1 = (0 + 1) + (1 + 1) + (1 + 2) + (1 + 3) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$
3. $\sum_{i=1}^4 i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$
4. $\sum_{i=1}^4 \frac{i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} = \frac{1+2+3+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$
5. $\sum_{i=2}^4 (i + 1) = (2 + 1) + (3 + 1) + (4 + 1) = 3 + 4 + 5 = 12$
6. $\sum_{i=0}^2 (i^2) = (0^2) + (1^2) + (2^2) = 0 + 1 + 4 = 5$
7. $\sum_{i=1}^3 \frac{i}{i+2} = \frac{1}{1+2} + \frac{2}{2+2} + \frac{3}{3+2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{3}{5} = \frac{43}{30}$
8. $\sum_{i=2}^4 (i^2 + i) = (2^2 + 2) + (3^2 + 3) + (4^2 + 4) = (4 + 2) + (9 + 3) + (16 + 4) = 6 + 12 + 20 = 38$
9. $\sum_{i=2}^3 (i + 2)^2 = (2 + 2)^2 + (3 + 2)^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$
10. $(\sum_{i=2}^3 i + 2)^2 = (2 + 2 + 3 + 2)^2 = 9^2 = 81$
11. $(\sum_{i=1}^3 i)^2 = (1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$
12. $\sum_{i=2}^4 (i - 2) = (2 - 2) + (3 - 2) + (4 - 2) = 0 + 1 + 2 = 3$
13. $3 \sum_{i=1}^4 i = 3(1 + 2 + 3 + 4) = 3 \cdot (10) = 30$
14. $\sum_{i=1}^5 x_i$, der $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 1$ og $x_5 = 10$. $\sum_{i=1}^5 x_i = 4 + 5 + 2 + 1 + 10 = 22$
15. Regn ut gjennomsnittet til observasjonene $x_1 = 53, x_2 = 42, x_3 = 38, x_4 = 61$ og $x_5 = 65$. Bruk formelen for gjennomsnitt, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Her er $n = 5$. Det gir $\bar{x} = \frac{1}{5} (53 + 42 + 38 + 61 + 65) = 51.8$

Oppgave 8.2 Ofte finnes det ikke kun én måte å skrive om rekkene på. Du kan bruke fantasien og lage en mengde kombinasjoner hvis du vil. Før du setter i gang lønner det seg å tenke på hvilket mønster du kan finne i tallrekka.

1. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \sum_{i=1}^8 i$ men det er også $\sum_{i=0}^7 i + 1$ og $\sum_{i=2}^9 i - 1$
2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7} = \sum_{i=2}^7 \frac{1}{i}$ eller $\sum_{i=0}^5 \frac{1}{i+2}$
3. $-1 + 0 + 1 + 2 + 3 = \sum_{i=1}^5 i - 2$ eller $\sum_{i=0}^6 i - 1$

$$4. 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i \text{ eller } \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1}$$

$$5. 3(2)^4 + 3(2)^5 + 3(2)^6 + \dots + 3(2)^{10} = 3 \sum_{i=1}^7 (2)^{i+3} \text{ eller } 3 \sum_{i=2}^8 (2)^{i+2}$$

$$6. 1 + 4 + 9 + 16 = \sum_{i=1}^4 i^2 \text{ eller } \sum_{i=0}^3 (i+1)^2$$

7. $3 + 5 + 7 + 9$. La i starte på 1. Da får vi:

$$3 = i + 2 = 1 + 2$$

$$5 = i + 3 = 2 + 3$$

$$7 = i + 4 = 3 + 4$$

$$9 = i + 5 = 4 + 5$$

Da kommer et annet mønster frem også $(2, 3, 4, 5)$. Så 3 kan skrives som $= i + i + 1$ og $5 = i + i + 1$ også videre $7 = i + i + 1$ og $9 = i + i + 1$. Summen er derfor $\sum_{i=1}^4 2i + 1$