

Litt om logaritmer (MATH001)

31. august 2017

Logaritmer

Logaritmer er en annen måte å tenke på potens på.

Definisjon

$\log_b(a) = c$ fordi $b^c = a$. Det er en invers funksjon. Der b er grunntallet og c er eksponenten. Begge uttrykk beskriver det samme forholdet.

En logaritme kan ha forskjellige grunntall. Vanlige grunntall er 2, 10 og e . Ta for eksempel en logaritme med 2 som grunntall.

- $\log_2(8) = 3$ fordi $2^3 = 8$

Begge uttrykk beskriver det samme forholdet mellom 2 og 3. Under finner du en tabell med eksempler på dette forholdet for logaritmer med 2 og 10 som grunntall.

Potens form	Logaritmisk form
$2^1 = 2$	$\log_2(2) = 1$
$2^3 = 8$	$\log_2(8) = 3$
$2^5 = 32$	$\log_2(32) = 5$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0.01$	$\log_{10}(0.01) = -2$
$10^2 = 100$	$\log_{10}(100) = 2$
$10^4 = 10000$	$\log_{10}(10000) = 4$

Den naturlige logaritmen

Den naturlige logaritmen har e (Eulers tall) som grunntall. I stedet for å skrive $\log_e(x)$ skriver vi $\ln(x)$. Den formelle definisjonen av en logaritme gjelder her også. $\ln(a) = c$ fordi $e^c = a$.

Regneregler

x og y er konstanter.

- Potens: $\log_b(a^x) = x \log_b(a)$
- Produkt: $\log_b(a \cdot c) = \log_b(a) + \log_b(c)$
- Brøk: $\log_b(\frac{a}{c}) = \log_b(a) - \log_b(c)$

Andre ting som er kjekt å vite

- Grunntallet b må være større enn null, $b > 0$.
- $\log_b(a)$ er ikke definert for $a \leq 0$
- $\log_b(1) = 0$, fordi $1 = 10^0 = 2^0 = e^0$ (også videre)
- $\log_b(b) = 1$, for eksempel $\log_{10}(10) = 1$ fordi $10^1 = 10$.

Definisjonsmengde og verdimengde

Finne definisjonsmengde

- Hva kan vi putte inn i en logaritme (uavhengig av hva grunntallet b er)?
 - Kun positive tall!

Finne verdimengde

- Hva skjer hvis vi øker tallet som står inne i logaritmen (a)?
 - Eksempel: $\log_b(4) > \log_b(2)$ fordi $\log_b(4) = \log_b(2 \cdot 2) = \log_b(2) + \log_b(2) = 2\log_b(2) > \log_b(2)$
 - Verdien på logaritmen øker og jo større tall vi putter inn, jo større blir verdien.
- Hva skjer hvis tallet i logaritmen (a) beveger seg mot null?
 - Eksempel: $\log_b(\frac{1}{4}) < \log_b(\frac{1}{2})$ fordi: $\log_b(\frac{1}{2}) = \log_b(1) - \log_b(2) = 0 - \log_b(2) = -\log_b(2)$ mens $\log_b(\frac{1}{4}) = \log_b(1) - \log_b(4) = 0 - \log_b(4) = -\log_b(4)$.
 - Jo nærmere a kommer null, jo mer negativ blir verdien av logaritmen.

Konklusjon

Når $f(x) = \log_b(x)$ der $b > 0$ har vi at $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ og $V_f : f(x) \in \mathbb{R}$

Likningsløsning

Hvordan løse likninger av typen $\log_{10}(x) = 2$, $10^x = 1000$, $\log_2(x) = 7$, $2^x = 64$, $\ln(x) = 4$ eller $e^x = 56$?

- Generell løsning av $\log_b(x) = a$: $\log_b(x) = a$ betyr at $x = b^a$ (fra definisjonen)
- Generell løsning av $b^x = a$: $b^x = a$ betyr at $\log_b(a) = x$. (fra definisjonen)

Eksempel:

- $\log_{10}(x) = 2$, da må $x = 10^2 = 100$
- $10^x = 1000$, da må $x = \log_{10}(1000) = 3$
- $\log_2(x) = 7$, da må $x = 2^7 = 128$
- $2^x = 64$, da må $x = \log_2(64) = 6$
- $\ln(x) = 4$, da må $x = e^4$
- $e^x = 56$, da må $x = \ln(56)$

Oppgaver

1. Skriv følgende på logaritmisk form

1. $2^8 = 256$
2. $4^3 = 64$
3. $10^6 = 1000000$

2. Skriv følgende på potens form

1. $\log_2(16) = 4$

2. $\log_4(16) = 2$
3. $\log_{10}(100000) = 5$
3. Regn ut ved hjelp av regneregler (ingen kalkulator, skriv svar på log-form)
 1. $\log_2(2^4)$
 2. $\log_4(4 \cdot 4)$
 3. $\log_{10}(\frac{1}{10})$
 4. $\log_2(\frac{1}{4})$
 5. $\log_b(\frac{x^2 y^3}{z})$
4. Finn definisjonsmengde og verdimengde. Hvor er nullpunktet?
 1. $f(x) = \log_2(x + 3)$
 2. $f(x) = \log_{10}(x - 5)$
 3. $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$
 4. $f(x) = \log_{10}(\frac{x}{100})$

Løsning

1. Skriv følgende på logaritmisk form
 1. $2^8 = 256$, $\log_2(256) = 8$
 2. $4^3 = 64$, $\log_4(64) = 3$
 3. $10^6 = 1000000$, $\log_{10}(1000000) = 6$
2. Skriv følgende på potens form
 1. $\log_2(16) = 4$, $2^4 = 16$
 2. $\log_4(16) = 2$, $4^2 = 16$
 3. $\log_{10}(100000) = 5$, $10^5 = 100000$
3. Regn ut ved hjelp av regneregler (ingen kalkulator!)
 1. $\log_2(2^4) = 4\log_2(2)$. Siden $\log_2(2) = 1$ fordi $2^1 = 2$ får vi $\log_2(2^4) = 4$
 2. $\log_4(4 \cdot 4) = \log_4(4) + \log_4(4)$. Siden $\log_4(4) = 1$ fordi $4^1 = 4$, får vi $\log_4(4 \cdot 4) = 1 + 1 = 2$
 3. $\log_{10}(\frac{1}{10}) = \log_{10}(1) - \log_{10}(10) = 0 - 1 = -1$
 4. $\log_2(\frac{1}{4}) = \log_2(\frac{1}{2^2}) = \log_2(1) - \log_2(2^2) = 0 - 2\log_2(2) = -2 \cdot 1 = -2$
4. Finn definisjonsmengde og verdimengde. Hvor er nullpunktet?
 1. $f(x) = \log_2(x + 3)$
 - (a) $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$ og $V_f : f(x) \in \mathbb{R}$
 - (b) Husk: $\log_b(1) = 0$. Så $\log_2(x + 3) = 0$ når $x + 3 = 1$, altså $x = -2$.
 2. $f(x) = \log_{10}(x - 5)$
 - (a) $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$ og $V_f : f(x) \in \mathbb{R}$
 - (b) Husk: $\log_b(1) = 0$. Så $\log_{10}(x - 5) = 0$ når $x - 5 = 1$, altså $x = 6$.

3. $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$

(a) $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$ er jo det samme som å skrive $f(x) = \ln(1) - \ln(x) = -\ln(x)$

(b) $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ og $V_f : f(x) \in \mathbb{R}$

(c) Nullpunkt når $x = 1$, da blir $\ln(\frac{1}{x}) = \ln(\frac{1}{1}) = \ln(1) = 0$

4. $f(x) = \log_{10}(\frac{x}{100})$

(a) $D_f : \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ og $V_f : f(x) \in \mathbb{R}$

(b) Husk: $\log_b(1) = 0$. Så $\log_{10}(\frac{x}{100}) = 0$ når $\frac{x}{100} = 1$, altså $x = 100$.